

因果時間関数のフーリエ変換の性質を利用した宇宙構造物の周波数応答解析法
弾性変位に着目した大型宇宙構造物の線形振動解析方法に関する研究 (その2)

A FREQUENCY RESPONSE METHOD OF SPACE STRUCTURE USING FOURIER
TRANSFORM OF CAUSAL TIME FUNCTION

A Study on the Linear Dynamic Analysis Method for a Large Space Structure Part 2

福和 伸夫* 森田 敦** 勝倉 裕***

Nobuo FUKUWA Atsushi MORITA Hiroshi KATUKURA

In the design of large space structures, the elastic displacement which relates to stresses must be properly evaluated. Usually, mode superposition method which uses only elastic eigenmodes has been applied to the analysis because of its simplicity. In the previous paper, the authors proposed the alternative method in which the external forces are projected to elastic subspace by the projection matrices. This method was powerful for the direct time integration method. In this paper, the other method in the frequency domain is newly developed, where the characteristics of Fourier transform of causal time functions are considered. First, through the study on the characteristics of the impulse time response and frequency response functions of the rigid body displacement, it is clarified that the frequency response function of the rigid body displacement is expressed only by real values except for zero frequency. As a result, the frequency response function of elastic displacement is derived from only the imaginary part of frequency response function using Hilbert transform.

Keywords : space structure, elastic displacement, linear dynamic analysis, frequency response method

宇宙構造物, 弾性変位, 線形振動解析, 周波数応答解析法

1. はじめに

比較的近い将来に大型構造物の宇宙空間上での建設が予定されている。すでに具体化されている宇宙ステーション「フリーダム」は百数十m規模の構造物であり、太陽発電衛星はkmオーダーの構造物となることが予想される。これらの構造物にはトラス構造や張力によって安定化した膜構造が採用される可能性が高く、地上の建築構造物と構造形式に共通性が多く認められる¹⁾。大型宇宙構造物は、従来の剛体的な小型の人工衛星とは、構造物の製造方法ならびに設計概念が大きく異なり、宇宙空間での建設が前提となる。従って、打ち上げ時の重力加

速度が構造物への主要外力から省かれ外力レベルが非常に小さくなる。結果として、構造物が柔軟となり、弾性応力に基づく弾性設計が基本となってくる。しかしながら、宇宙構造物は地球などに支持されていないために剛体変位を内在する。このため、通常の振動解析を行うと、変位応答に剛体変位が支配的となり、弾性変位が数値誤差に隠れてしまい、精度よく応力を求めることが困難になることがある²⁾。

このような観点から、大型宇宙構造物の解析には従来よりモード合成法が多用されてきた。その理由は構造物の弾性固有モードのみを用いたモード合成法を適用する

本報の一部は、文献⁸⁾~¹⁰⁾に既に発表している。

* 名古屋大学工学部建築学科 助教授・工博

** 同上 大学院生 (現大成建設)

*** 清水建設(株)大崎研究室 主任研究員・工博

Assistant Prof. Dep.of Architecture, School of Eng., Nagoya University, Dr.Eng.

Graduate Student Dep.of Architecture, School of Eng., Nagoya University

Senior Res. Engineer, Ohsaki Research Institute, Shimizu Corporation, Dr.Eng.

ことにより容易に弾性変位を抽出することができることにある。本来は、剛体変位には剛体回転成分が含まれているので、幾何学的な非線形性を考慮した解析が必要であるが、姿勢制御装置によって剛体回転が抑制・制御される可能性が高いこと、数多くの設計検討に大自由度の動的非線形解析を行うことが煩雑であること、などの理由から線形の振動解析が用いられることが多い。また、モード縮約した上で振動制御のための制御則を適用できること、部分モード法の適用が容易であることもモード合成法がよく用いられている理由であると考えられる。

しかしながら、非線形解析との連続性や、種々の振動諸元の振動数依存性を考えると、適切な直接時間積分解析法や周波数応答解析法の構築も必要であると考えられる。そこで、前報²⁾では射影行列を利用した振動解析法を提示した。この方法は、剛体モードから誘導される射影行列を用いて、外力ベクトルを弾性モードが張る部分空間に射影し、自己釣合外力に変換することにより弾性変位応答を直接誘導する方法であり、直接時間積分法と周波数応答解析法に適用が可能である。ただし、周波数応答解析法への適用に際しては、振動数0の外力に対する弾性変位成分である静的変位成分の誘導に一般逆行列の利用が必要となり、解析がやや煩雑となっていた。

そこで、本論では、因果時間関数のフーリエ変換の性質を利用した周波数応答解析法を示す。ここでは、

- 1) 剛体変位の周波数応答関数は原点(振動数0)を除いて実数となる。
- 2) 因果時間関数の周波数応答関数の実部と虚部はヒルベルト変換の対をなす³⁾。

の2つの性質を利用することにより、弾性変位応答が、周波数変位応答関数の虚部のみから直接的に得られることを示す。まず、剛体変位の周波数応答関数の性質をデルタ関数などの超関数を用いて示し、剛体変位の周波数応答関数は、静的に無限発散し全振動数で値を有する実部と、デルタ関数の導関数で与えられる虚部で表されることを明かとする。即ち、振動数0を除く全体変位の周波数応答関数の虚部は弾性変位のみに寄与することとなる。一方、周波数応答関数は因果関数であるインパルス応答のフーリエ変換対であるので、その実部と虚部はヒルベルト変換の関係を満足する。従って、弾性変位の周波数応答関数の実部が虚部から誘導される。結果として、弾性変位の複素周波数応答関数から弾性変位の時刻歴応答が誘導される。

なお、因果時間関数のフーリエ変換の性質は、Papoulisの著書³⁾に詳述されている。また、デルタ関数などの超関数の性質は篠崎らの著書⁴⁾に詳しい。周波数応答関数の実部のみ、もしくは、虚部のみの情報から、高速フーリエ変換を利用して因果時間関数を求める方法については勝倉らの研究^{5) 6)}がある。

2. 周波数領域における剛体変位応答の性質

宇宙構造物のように空中に浮遊する構造物の線形の運動方程式は、有限要素法などを用いることにより以下のように得られる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ は各々質量、減衰、剛性行列であり、 $\mathbf{u}(t)$ 及び $\mathbf{f}(t)$ は変位及び外力ベクトルである。また、 t は時間を、 $\dot{}$ は時間微分を表す。空中に浮遊する構造物の場合には、剛性行列 $\mathbf{K}$ は半正定値行列となり、(1)式の固有値にゼロ固有値を含む。又、宇宙空間においては空気抵抗がないので減衰行列は内部減衰のみで与えられる。従って、(1)式の解には剛体変位成分が含まれ、剛体変位に対して仕事をするのは質量行列のみとなる。

(1)式に対する剛体加速度応答 $\ddot{\mathbf{u}}_R(t)$ は以下のように求めることができる。(1)式の実固有値問題、

$$\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Omega^2 \quad (2)$$

より、固有モード行列 Φ (ただし、 $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$)とスペクトル行列 Ω^2 を求めると、これらは、

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega_E^2 \end{bmatrix} \quad \Phi = [\Phi_R \quad \Phi_E] \quad (3)$$

のように、剛体モード(R)と弾性モード(E)の寄与に分けることができる。剛体変位は、剛体モードと一般化変位 $\mathbf{U}_R$ を用いて、

$$\mathbf{u}_R(t) = \Phi_R \mathbf{U}_R(t) \quad (4)$$

と表すことができるので、この関係を(1)式に代入し、左から剛体モード行列の転置を乗じることにより、

$$\ddot{\mathbf{U}}_R(t) = \Phi_R^T \mathbf{f}(t) \quad (5)$$

が得られる。結果として、剛体変位に伴う加速度が、

$$\ddot{\mathbf{u}}_R(t) = \Phi_R \Phi_R^T \mathbf{f}(t) \quad (6)$$

と誘導される。

今、外力として単位インパルスを考える。

$$f(t) = \delta(t) p \quad (7)$$

ここに、 $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数、 p は外力作用位置を示すベクトルである。インパルス外力に対するインパルス応答を $h(t)$ と記すこととし、(6)式をフーリエ変換すると、

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt \quad a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8)$$

を利用することにより、

$$\ddot{H}_R(\omega) = \Phi_R \Phi_R^t p \quad (9)$$

となる。ここに、 $H(\omega)$ は周波数変位応答関数である。この関係を、

$$\ddot{h}_R(t) = \Phi_R \Phi_R^t p \delta(t) \xleftrightarrow{\omega} \ddot{H}_R(\omega) = \Phi_R \Phi_R^t p \quad (10)$$

と表すことにする。上式に対応する速度および変位応答は、超関数のフーリエ変換の性質ならびに時間積分の性質³⁾、

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xleftrightarrow{\omega} 1 \\ U(t) &= \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\omega} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \\ tU(t) &= \int_{-\infty}^t U(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\omega} -\frac{1}{\omega^2} + i\pi \frac{d\delta(\omega)}{d\omega} \end{aligned} \quad (11)$$

を利用して、以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \dot{h}_R(t) &= \Phi_R \Phi_R^t p U(t) \xleftrightarrow{\omega} \dot{H}_R(\omega) = \Phi_R \Phi_R^t p \left(\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \right) \\ h_R(t) &= \Phi_R \Phi_R^t p tU(t) \xleftrightarrow{\omega} H_R(\omega) = -\Phi_R \Phi_R^t p \left(\frac{1}{\omega^2} - i\pi \frac{d\delta(\omega)}{d\omega} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

すなわち、宇宙構造物の場合には、速度と変位の周波数応答関数は静的に特異となり、速度の周波数応答関数は、原点で実部がインパルスに、虚部は原点で無限大となり全振動数で値を有する。逆に、変位の周波数応答関数は、原点で虚部がインパルスの導関数で与えられ、実部は全振動数で値を有する。これらの特性を図-1に示す。

3. 因果時間関数のフーリエ変換の性質

負の時間で値を持たない実因果時間関数 $a(t)$ の周波数応答関数 $A(\omega)$ の実部 $A^r(\omega)$ と虚部 $A^i(\omega)$ の間には、ヒルベルト変換の関係がある。

$$\begin{aligned} A^r(\omega) &= A^r(\infty) + \frac{1}{2\pi} i A^i(\omega) * \frac{2}{i\omega} \\ i A^i(\omega) &= \frac{1}{2\pi} A^r(\omega) * \frac{2}{i\omega} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $*$ は合成積を表している。ここに、第1式の右辺第1項は、時間0の原点にインパルスが存在する場合の付加項である。結果として、実因果時間関数の周波数関数の実部と虚部は合成積を利用して互いに誘導することができる。なお、(10)および(12)式に示した剛体変位成分の周波数応答関数の実部と虚部はヒルベルト変換の関係を満足している。

一方、合成積のフーリエ変換対は単なる乗算となること、及び $(2/i\omega)$ のフーリエ変換対が符号関数 $\text{sgn}(t)$ で与えられることを利用することによっても、実部と虚部の相互誘導が可能となる。すなわち、周波数関数の実部(虚部)をフーリエ逆変換したのちに、符号関数を乗じ、フーリエ変換を行う。

$$\begin{aligned} A^r(\omega) &= A^r(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i A^i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] dt \\ i A^i(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^r(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] dt \end{aligned} \quad (14)$$

4. 弾性変位応答の算定

(12)式より、剛体変位の周波数応答関数は、静的値を除いて実数で表されることが明かとなった。一方、前報²⁾の(21)式より弾性変位の周波数応答関数の静的値は、下式で与えられる。

$$H_E(\omega=0) = \Phi_E \Omega_E^{-2} \Phi_E^t p \quad (15)$$

これから弾性変位は静的には実数であり、虚部を有しないことが分かる。

(12)式および(15)式より、内部減衰のみを有する宇宙構造物の場合、その周波数応答関数は以下の性質を有することがわかる。

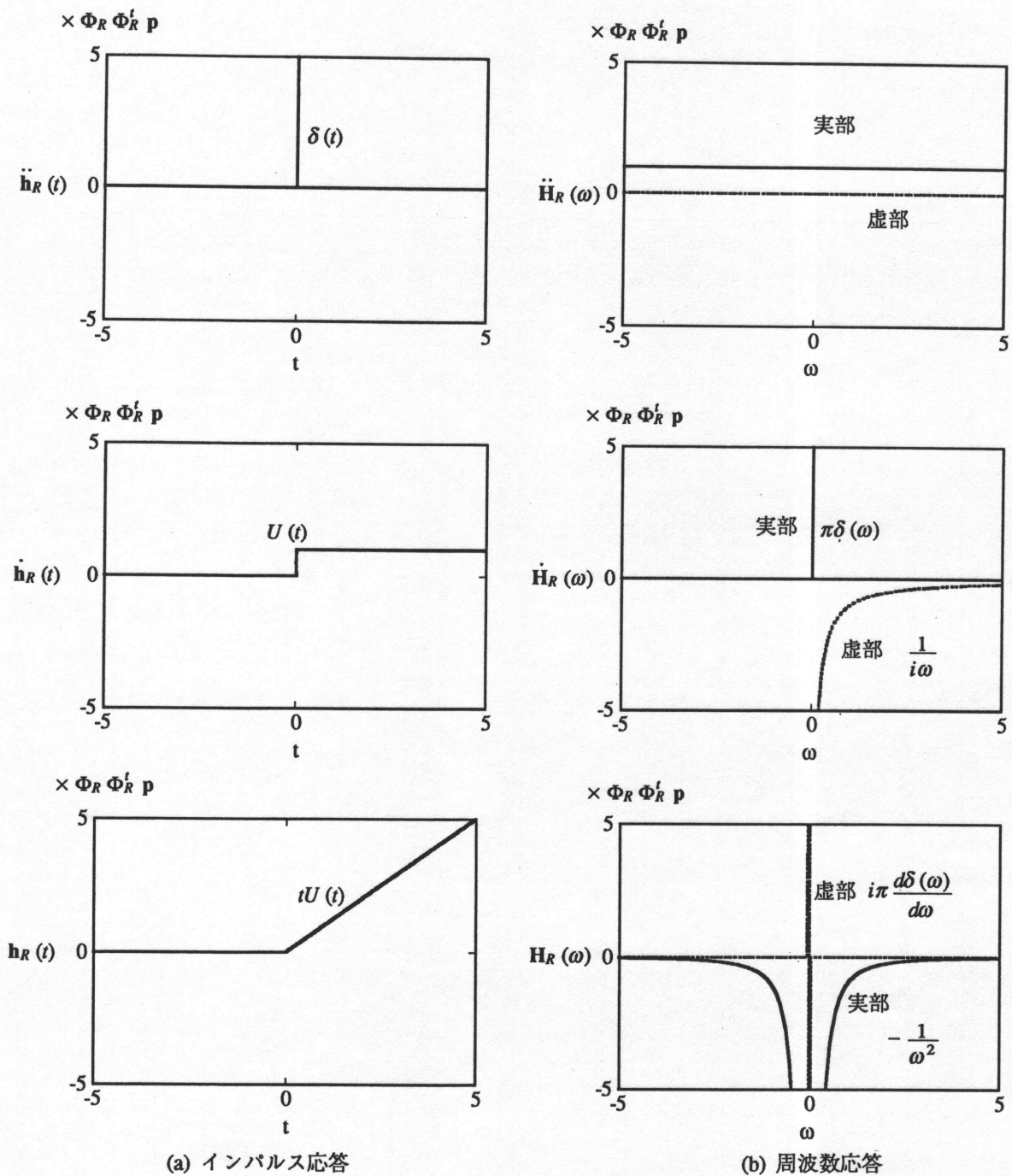


図-1 剛体変位成分のインパルス応答と周波数応答

- (i) 剛体変位は全振動数で値をもち静的に無限大となる実部と、原点（振動数0）のみに値（インパルスの導関数）をもつ虚部で表される。
- (ii) 弾性変位は原点（振動数0）では実数となる。
- (iii) 従って、全体変位から原点での値を除去すれば、虚部は弾性変位にのみ寄与する。

そこで、全体変位の周波数応答関数の虚部のみから、弾性変位の周波数応答関数を求める方法を考える。

(7)式で与えられるインパルス外力を想定し、時間領域における運動方程式(1)式をフーリエ変換すると周波数領域の運動方程式は、

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{H}(\omega) = \mathbf{p} \quad (16)$$

となる。これから全体変位の周波数応答関数 $H(\omega)$ が得られる。(16)式および前述の性質 (iii) より、弾性変位の周波数応答関数の虚部は、

$$i H_E^i(\omega) = \text{Im} \left[(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{p} \right] \quad (17)$$

$$= 0 \quad \begin{array}{l} \text{for } \omega \neq 0 \\ \text{for } \omega = 0 \end{array}$$

と求めることができる。対応する実部 $H_E^r(\omega)$ は、ヒルベルト変換(13)式～(14)式により評価することができる。但し、この場合右辺第1項の付加項は不要である。(13)式に示したヒルベルト変換は無限積分を伴っており、数値計算上効率がよくない。そこで、高速フーリエ変換(FFT)の利用を前提に(14)式を用いることとする。

$$H_E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} 2U(t) \int_{-\infty}^{\infty} i H_E^i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) e^{-i\omega t} dt \quad (18)$$

このように、2回のFFTを介して、弾性変位の周波数応答関数が全体変位の周波数応答関数の虚部のみの情報から得られる。

(18)式により得られた弾性変位の周波数応答関数と外力ベクトル $f(t)$ のフーリエスペクトル $F(\omega)$ を用いることにより、弾性変位の時刻歴応答は、

$$u_E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_E(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (19)$$

と求められる。

なお、周波数応答関数の特異性の除去の方法として、周波数応答関数を時間微分する方法が林⁷⁾により示されており、この方法を適用することも想定されるので以下に補足する。図-1に示したように、宇宙構造物などの浮遊構造物の場合には、剛体変位および速度の周波数応答関数は静的に特異になるが、加速度は非特異である。そこで、非特異な状態まで時間微分(2回 $i\omega$ を乗じる)を行ない、全体加速度の周波数応答関数から剛体加速度の周波数応答関数を減じ、その後、時間に関して積分(2回 $i\omega$ で割る)するという、弾性変位の周波数応答関数評価法が考えられる。これによって、弾性変位応答を精度よく求めることが可能となる。すなわち、(9)式を用いることにより、

$$H_E(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} (\ddot{H}(\omega) - \Phi_R \Phi_R^T p) \quad (20)$$

と弾性変位応答を求めることができる。しかし、上式において静的値を求めることは困難であり、前報²⁾と同様に一般逆行列を用いる必要がある。これを避けるには、因果時間関数の周波数関数のヒルベルト変換の性質を利用して、(20)式の虚部の情報から弾性変位の周波数応答関数を求める必要がある。結果として、前節に示した方法と一致することになる。

5. 解析例

本論に示した解析手法の有効性を示すために、前報²⁾と同様に図-2に示す単純な浮遊構造物を対象に解析を行なう。ここでは、全長30mの1次元構造物を考え、せん断変形を考慮した梁要素により6分割したモデルを用いている。質量行列は整合質量行列を採用している。各部材は直径5cm、材長5mの密実材とし、鋼製部材を想定して単位体積重量 7.9 t/m^3 、ヤング係数 $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 $1/3$ を用いている。また、材料減衰は複素減衰の形で1%を与えている。解析は周波数領域で行ない、時間刻み 0.02 秒、継続時間 80.92 秒、振動数範囲 $0 \sim 25 \text{ Hz}$ とした。また、加振は構造物中央に材軸直交方向に作用させている。インパルス力は時刻 0 秒で、 $50t (=1/\Delta t)$ を与えている。図-3に構造物中心位置の並進周波数応答を、図-4に対応するインパルス応答を示す。解析結果については、弾性変位と剛体変位に分離して示し、図中にはモード解析法と射影行列を利用した解析法²⁾と本解析法による結果が併せ示してある。各結果は一致しており、適切に弾性変位応答を抽出できていることがわかる。周波数応答を観察すると、低振動数領域では剛体変位が支配的であり、比較的振動数が高くなると弾性振動が優勢となっている。

次に、図-5に示す平面トラスの解析例を図-6～7に示す。トラス部材およびジョイントの諸元はNASAのデータを参考に設定した。なお、部材材料はアルミとグラファイトエポキシの複合材が想定されているが、ここではアルミの諸元を用いている。応答値は荷重作用点の荷重方向変位について示してある。

図中には、前報²⁾の射影行列を利用した方法の結果を破線で、本報で示した因果関数のフーリエ変換の性質を利用した方法の結果を実線で示してある。両手法による結果は一致している。また、平面トラスの結果は前出の例題と同様の応答特性を示している。

最後に、全体変位応答から剛体変位応答を減じること

により求めた弾性変位応答と、本解析法により求めた弾性変位応答との比較の時刻歴応答波形と複素包絡線を図-8に示す。図中には、前者を破線で、後者を実線で示してある。このように、外力作用時から時間が経過するにつれ、全体変位応答に占める弾性変位応答の割合が非常に小さくなり、弾性変位応答を直接誘導する方法を採用しないと弾性変位応答が剛体変位応答の数値誤差に隠れてしまうことが理解できる。

6. まとめ

宇宙構造物のように弾性支持されない浮遊構造物の周波数応答解析において、弾性変位を適切に求める方法を示した。まず、剛体変位のインパルス応答と周波数応答関数の性質を超関数を用いて議論し、その結果、周波数応答関数の虚部が振動数ゼロを除いて弾性変位のみに参与することを示した。そこで、因果時間関数の周波数関数の実部と虚部の間のヒルベルト変換の関係を利用して、虚部の情報のみから弾性変位の周波数応答関数を求める方法を示した。

前報²⁾に示した射影行列を用いる方法と本法の利用により、モード解析法に限定されがちであった大型宇宙構造物の解析に、直接時間積分法や周波数応答解析法の適用が可能となり、問題の特徴に応じて解析法を使い分けことが可能となった。特に本解析法を利用すると、振動数に依存する物性を考慮したり、動的サブストラクチャー法を適用することが容易になる。

謝辞

本論をまとめるに当たり、清水建設(株)大崎研究室の中井正一博士、新美勝之氏に貴重な助言を頂きました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 名取通弘 : 宇宙構造物工学の概要, 土木学会論文集, 第410号, 1989, pp.1-16
- 2) 福和伸夫, 勝倉裕, 中井正一, 半谷裕彦 : 弾性振動に着目した宇宙構造物の線形振動解析方法に関する研究 - 射影行列の利用による直接時間解析と周波数解析への適用 -, 日本建築学会構造系論文報告集, 第427号, 1991, pp.79-86
- 3) Papoulis, A. : The Fourier Integral and its Applications, McGraw-Hill, New York, 1962
- 4) 篠崎寿夫, 松森徳衛, 松浦武信 : 現代工学のためのデルタ関数入門, 現代工学社, 1983
- 5) Katukura, H., Ohno, S. and Izumi, M. : Symmetrical FFT technique and its applications to earthquake engineering, Eartq. Eng. Struc. Dyn., Vol. 18, 1989, pp.717-725
- 6) Katukura, H. and Hayashi, Y. : Causal FFT Treatment Applicable to Singularity Functions, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.30, 1990
- 7) 林康裕 : 時間因果性を考慮した地盤・構造物の地震時挙動の評価手法に関する研究, 京都大学学位論文 (ORI研究報告91-01, 清水建設), 1991
- 8) 福和伸夫, 勝倉裕, 中井正一 : 大型宇宙構造物の線形振動解析における弾性変位評価法に関する研究, 第15回構造工学における数値解析法シンポジウム, 1991, pp.603-608
- 9) 福和伸夫, 勝倉裕, 新美勝之, 中井正一 : 弾性変位に着目した大型宇宙構造物の線形振動解析法, 1991, 第7回宇宙構造物シンポジウム, 1991, pp.14-20
- 10) 福和伸夫, 勝倉裕 : 剛体変位を内在する構造物の周波数応答解析法に関する研究, 日本建築学会東海支部研究報告集, 1992, pp.145-148

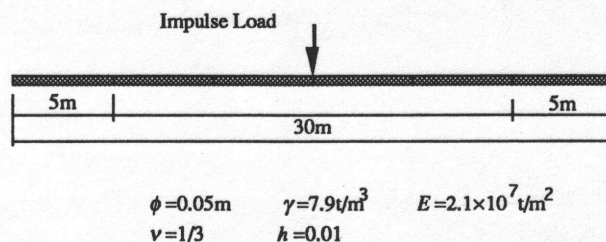
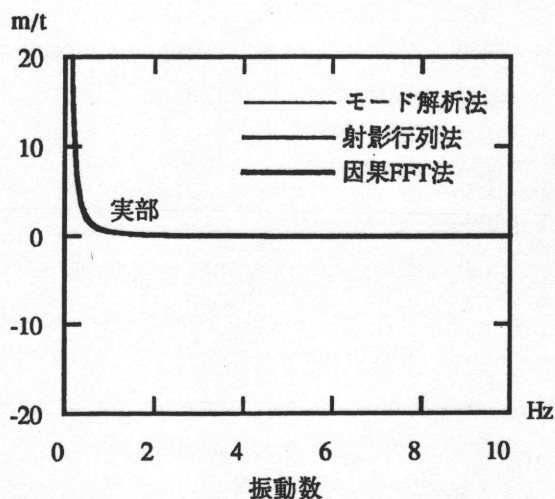
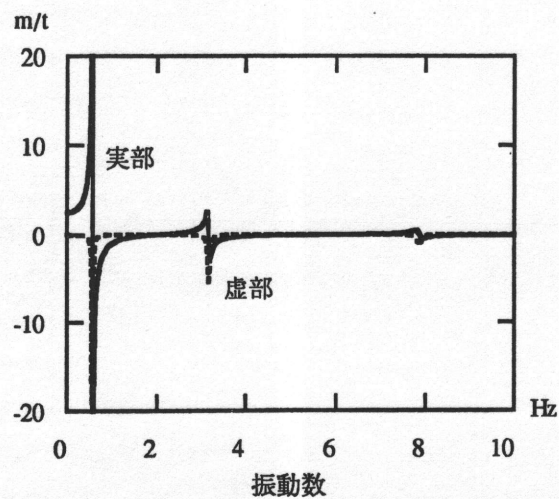


図-2 検証用解析モデル

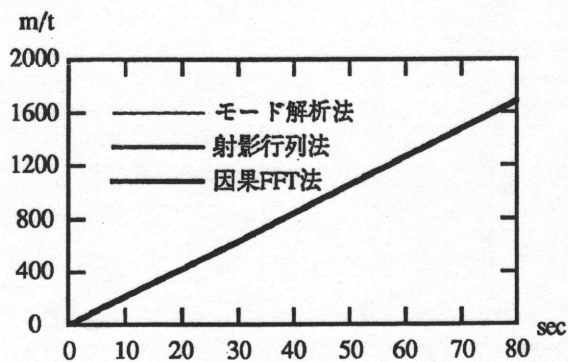


(a) 剛体変位

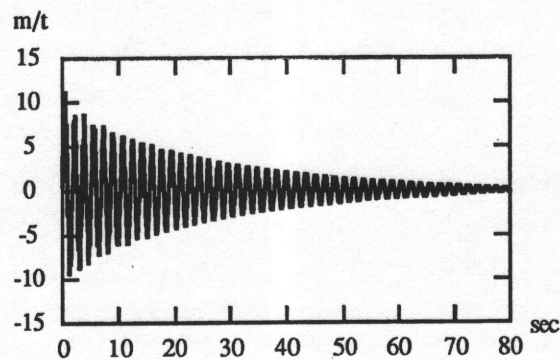


(b) 弾性変位

図-3 周波数応答関数

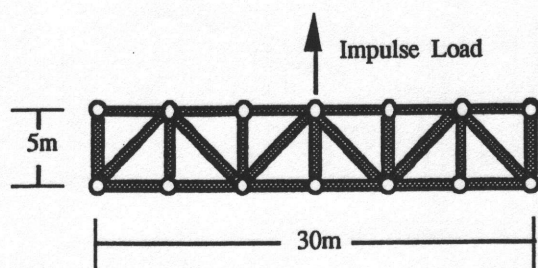


(a) 剛体変位



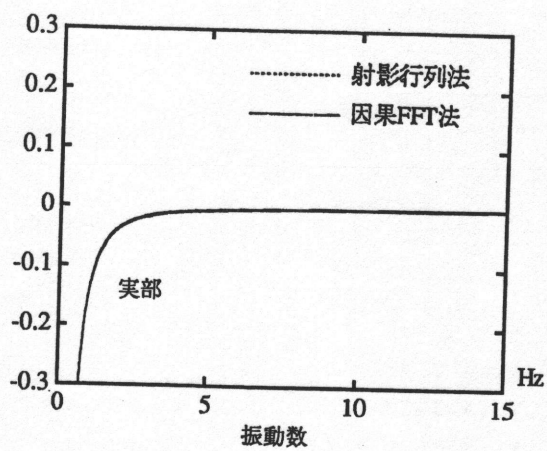
(b) 弾性変位

図-4 インパルス応答関数

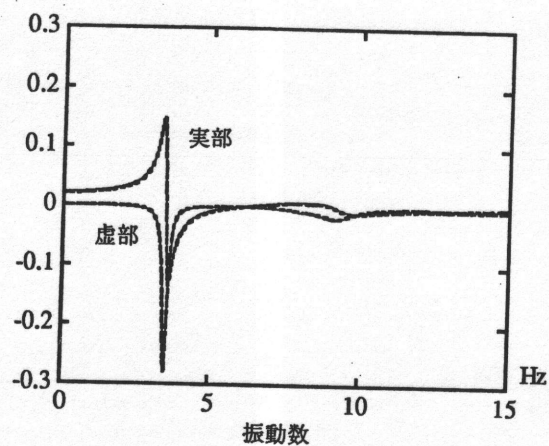


Constants of Pipe	
diameter	50 mm
thickness	1.5 mm
weight / volume	2.69 t/m^3
Young's modulus	$0.7 \times 10^7 \text{ t/m}^2$
Poisson's ratio	0.345
material damping	3 %
(stiffness proportional damping)	
Constants of Joint	
weight	$6.018 \times 10^{-2} \text{ tf}$

図-5 平面トラスの解析

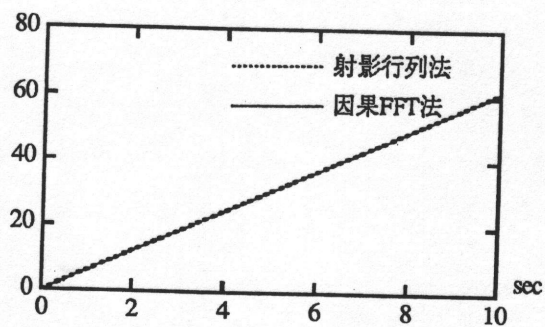


(a) 剛体変位

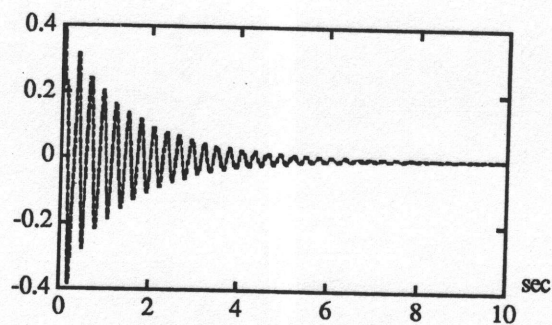


(b) 弾性変位

図-6 周波数応答関数

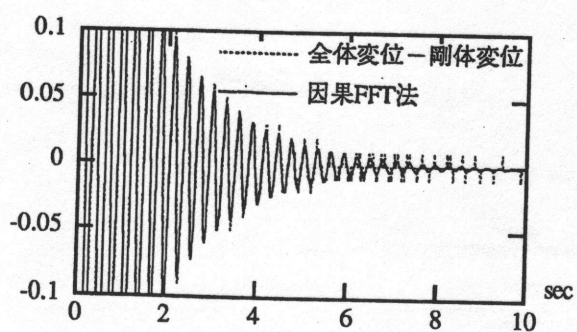


(a) 剛体変位

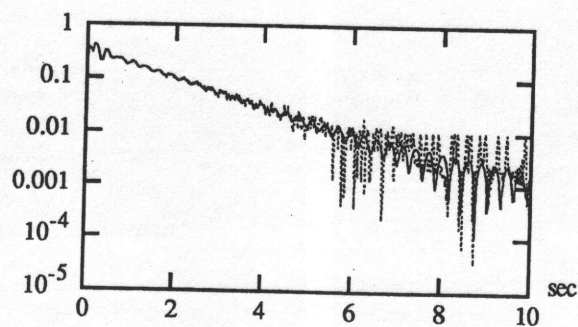


(b) 弾性変位

図-7 インパルス応答関数



(a) 時刻歴応答波形



(b) 複素包絡形

図-8 誤差の検討