

構造物の固有振動特性に及ぼす動的相互作用効果に関する研究

A STUDY ON THE EFFECT OF SOIL STRUCTURE INTERACTION ON THE EIGENPROPERTY OF STRUCTURE

福和伸夫*, ガナド・M・アリ**, 八木茂治***

Nobuo FUKUWA, M. Ali GHANNAD and Shigeharu YAGI

In order to grasp the dynamic characteristics of structure considering soil structure interaction, the eigenproperty of structure having identical stiffness and mass distribution is evaluated. As evaluation methods, two approaches are introduced. The first is based on explicitly representing the determinant of dynamic stiffness matrix by the polynomial expression using the property of the cofactor expansion of tridiagonal matrix having common elements. The another method is based on explicit representation of transfer function using the transfer matrix method which is powerful for periodic structures. The dependency of the eigenfrequencies and damping ratios on the analysis model, story and size of structure and stiffness of soil are studied. First, the effect of soil-structure interaction on the eigenfrequencies for undamped models are studied. Secondly, the effect of damping on the eigenproperty is studied through the complex eigenvalues and transfer functions and it is clarified that the soil-structure interaction gives a large influences on the dynamic property of structures, which points out the limitage of conventional real eigenanalysis and the importance of proper selection of damping model.

keywords : *Soil Structure Interaction, Eigen Frequency, Damping Ratio, Gravitational Equation, Cofactor Expansion, Transfer Matrix Method*

動的相互作用, 固有振動数, 減衰定数, 重力式, 余因子展開, 伝達行列法

1. はじめに

構造物の動特性を表わす指標として, 固有振動数(もしくは固有周期)と減衰定数が用いられる機会が多い。これらは耐震設計上非常に重要な量であり, 新耐震設計法¹⁾などでは固有周期と軒高(もしくは階数)との関係式を地震荷重の算定に際して利用している。ここで用いられている関係式は既往の数多くの実測記録²⁻³⁾に基づく回帰式である。また, 地震応答解析に基づく耐震設計を行う場合に重要となる減衰定数の評価についても, 実測記録に基づく分析が高層建物を中心に勢力的に行われ始めている⁴⁻⁶⁾。固有振動数や減衰定数には種々の要因が潜在的に含まれているが, 一般にこれらの評価式はその簡便性ゆえに構造種別と階数などにより表現している。構造物の固有振動数や減衰定数に大きな影響を及ぼ

す構造物と地盤との動的相互作用効果について考慮した例は, 大場⁷⁾を除き検討例が少ない。また, 小林は固有周期と減衰定数の積が一定値となるとの検討結果を示しており⁸⁻⁹⁾, 動的相互作用が構造物の固有振動特性に与える影響は無視できないと考えられる。一般に動的相互作用効果は, 固有振動数を低下させたり減衰定数を変動させる効果があり¹⁰⁻¹¹⁾, 特に, 地盤が軟弱で規模の大きい構造物の場合にその影響が顕著である。

そこで, 本論では, 構造物の固有振動特性に及ぼす動的相互作用効果を解析的に検討する。問題を簡単にするために, 全層で同一の剛性・質量分布を有するせん断型構造物を対象し, 動的相互作用効果は振動数に依存しない剛性と減衰係数で近似したスウェイ・ロッキングばねにより考慮する。この結果, 複素固有値を比較的容易に

* 名古屋大学工学部建築学科 助教授・工博

** 名古屋大学工学部建築学科 大学院生・工修

*** 名古屋大学工学部建築学科 大学院生

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, School of Eng., Nagoya University, Dr. Eng.

Graduate Student, Dept. of Architecture, School of Eng., Nagoya University, M. Eng.

Graduate Student, Dept. of Architecture, School of Eng., Nagoya University

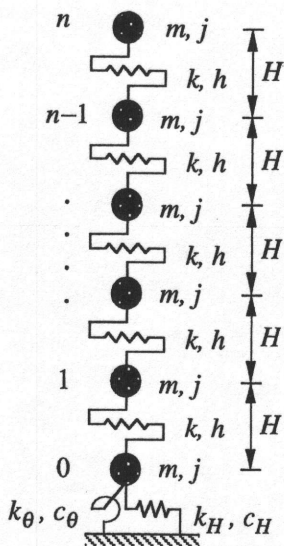


図-1 解析モデル

が等しい構造物であるので、構造物の周期性¹²⁾に着目することにより伝達関数を陽に求めることができる。ここでは、基礎固定モデルとスウェイばねで支持された構造物の伝達関数を陽に表示する方法を示す。固有振動数と減衰定数は伝達関数の分母がゼロとなる複素固有振動数から誘導することができる。これらの2つの方法を用いて、動的解析モデル・階数・基礎サイズ・地盤剛性が固有振動特性に与える影響を考察する。

2. 行列式の余因子展開を用いた方法

図-1に示す等質量・等剛性分布せん断型構造物を解析の対象とする。各階剛性を k 、複素減衰の形で考慮した内部減衰定数を h 、質量と回転慣性質量を m と j 、階高を H と記す。動的相互作用効果は、スウェイおよびロッキングインピーダンスにより考慮し、振動数に依存しないばねとダッシュポットに置換する。

2.1 基礎固定時の固有振動特性

質点0の位置が固定端となっている場合を想定する。このときの、自由振動問題の運動方程式は下式のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2(1+2hi)-\omega^2 & -\omega_0^2(1+2hi) & \dots & 0 \\ -\omega_0^2(1+2hi) & 2\omega_0^2(1+2hi)-\omega^2 & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 2\omega_0^2(1+2hi)-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = 0 \quad (1)$$

求めることが可能となる。本論では、以下の2つの方法を用いる。

1つは、動的係数行列の行列式に着目した方法であり、余因子展開と小行列の漸化式を利用して、行列式を陽に多項式表示する方法である。固有振動数と減衰定数は、この多項式の根である複素固有値から評価する。他の方法は、伝達行列法に基づく方法である。本対象構造物は質量と剛性

ここに、 ω_0 は1階建時の非減衰固有円振動数であり、剛性 k と質量 m から、

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2)$$

と定義される。(1)式左辺の係数行列 S_n^{fx} の行列式をゼロとする ω が n 階建建物の複素固有円振動数となる。 n 階建建物の固有振動数 ω_n の ω_0 に対する比を、

$$\zeta = \omega_n / \omega_0 \quad (3)$$

と定義すると、(1)式の固有値問題は下式で与えられる行列式 $f_n^{fx}(\zeta) = 0$ の根 ζ を求める問題に帰着される。

$$f_n^{fx}(\zeta) = \det \begin{bmatrix} 1 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} & -1 & & 0 \\ -1 & 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} \end{bmatrix}_n \quad (4)$$

ここに、行列の下添字 n は行列のサイズを示す。上式は、余因子展開をすることにより、

$$f_n^{fx}(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta^2}{1+2hi}\right) f_{n-1}^{tri}(\zeta) - f_{n-2}^{tri}(\zeta) \quad (5)$$

と変形することができる。上式中、 $f_{n-1}^{tri}(\zeta)$ は(4)式の行列の1行1列を除いた小行列の行列式である。この小行列は行列要素が共通な三重対角行列となり、余因子展開を利用して以下の漸化式表現を得ることができる。

$$f_n^{tri}(\zeta) = \det \begin{bmatrix} 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} \end{bmatrix}_n \\ = \left(2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi}\right) f_{n-1}^{tri}(\zeta) - f_{n-2}^{tri}(\zeta) \quad (6)$$

上式の漸化式は、下式で定義される補助変数 ξ と η 、

$$\xi + \eta = 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} \quad \xi\eta = 1 \quad (7)$$

を用いて解くことができる。

$$f_n^{tri}(\zeta) = \eta^{n-2} \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^i f_2^{tri}(\zeta) - \xi \eta^{n-2} \sum_{i=0}^{n-3} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^i f_1^{tri}(\zeta) \\ = \frac{\eta^{n-1} - \xi^{n-1}}{\eta - \xi} f_2^{tri}(\zeta) - \xi \eta \frac{\eta^{n-2} - \xi^{n-2}}{\eta - \xi} f_1^{tri}(\zeta) \quad (8)$$

ここで、明らかに、

$$\begin{aligned} f_1^{tri}(\zeta) &= 1 - \zeta^2 = \xi + \eta \\ f_2^{tri}(\zeta) &= (1 - \zeta^2)^2 - 1 = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 \end{aligned} \quad (9)$$

であるので、(8)式で示される三重対角行列の行列式は、

$$\begin{aligned} f_n^{tri}(\zeta) &= \frac{\eta^{n+1} - \xi^{n+1}}{\eta - \xi} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^m \frac{n+1}{1+2hi} C_{2j+1} \zeta^{2j} \left(2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} \right)^{n-2j} \left(\frac{\zeta^2}{1+2hi} - 4 \right) \end{aligned}$$

m : quotient of n and 2 (integer part of $n/2$)

(10)

と多項式展開される。(10)式を(5)式に代入することにより固有振動数比 ζ に関する多項式が得られる。

2. 2 地盤のスウェイばねを考慮した固有振動特性

地盤のスウェイばねを考慮した場合を考える。スウェイばねを、振動数に依存しない剛性 k_H と粘性減衰係数 c_H によって近似すると、自由振動問題の運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n^{fix} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 \dots & \begin{bmatrix} -(1+2hi)\omega_0^2 \\ -(1+2hi)\omega_0^2 + \frac{k_H}{m} + i\omega \frac{c_H}{m} - \omega^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

となる。上式の係数行列を S_n^{sway} と記すこととする。(10)式に対応する固有値は、行列式、

$$f_n^{sway}(\zeta) = \det \begin{bmatrix} 1 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{\zeta^2}{1+2hi} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 + \kappa_H \frac{1+2\zeta h_{Hi}}{1+2hi} - \frac{\zeta^2}{1+2hi} \end{bmatrix}_{n+1} \quad (12)$$

がゼロとなる根 ζ である。ここに、 κ_H と h_H は、

$$\kappa_H = \frac{k_H}{k} \quad h_H = \frac{c_H \omega_0}{2k_H} \quad (13)$$

により定義されるスウェイばねの剛性比と粘性減衰定数である。(12)式を余因子展開し、(5)式を利用すると、

$$f_n^{sway}(\zeta) = \left(\left(1 + \kappa_H \frac{1+2\zeta h_{Hi}}{1+2hi} \right) - \frac{\zeta^2}{1+2hi} \right) f_n^{fix}(\zeta) - f_{n-1}^{fix}(\zeta) \quad (14)$$

が得られる。

2. 3 スウェイ・ロッキングモデルの固有振動特性

さらに、地盤のロッキングばねを考慮した場合を考える。ロッキングばねもスウェイばねと同様にばね定数 k_r と粘性減衰係数 c_r により近似する。この場合の自由振動問題は、

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n^{sway} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -(1+2hi)\omega_0^2 \\ \vdots \\ (1+2hi)\omega_0^2 \\ \frac{k_r + i\omega c_r}{mH^2} + n\omega_0^2 \\ \frac{(n+1)j\omega^2}{mH^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_0 \\ \theta H \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

で与えられる。上式に対応する固有値問題の行列式も前節と同様の手続きにより以下のように多項式展開することが⁸⁾できる。

$$\begin{aligned} \frac{f_n^{SR}(\zeta)}{H^2} &= \left\{ \left(\kappa_H \kappa_\theta \frac{1+2\zeta h_{\theta i}}{1+2hi} + n \right) - \frac{(n+1)\kappa_m^2 \zeta^2}{1+2hi} \right\} f_n^{sway}(\zeta) \\ &\quad - \left\{ \left(1 + \kappa_H \frac{1+2\zeta h_{Hi}}{1+2hi} \right) - \frac{\zeta^2}{1+2hi} \right\} f_{n-1}^{tri}(\zeta) \\ &\quad + f_{n-2}^{tri}(\zeta) - f_n^{fix}(\zeta) + 2 \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 κ_θ 、 κ_m 、 h_θ は、

$$\kappa_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{H^2 k_H}} \quad \kappa_m = \sqrt{\frac{j}{H^2 m}} \quad h_\theta = \frac{c_\theta \omega_0}{2k_\theta} \quad (17)$$

で定義される無次元量であり、地盤ばねに関する無次元回転半径、質点の無次元回転半径、ロッキングばねの等価粘性減衰定数を表す。結果として、動的相互作用効果を議論する上では、(13)式および(17)式に示した無次元量が本質的なパラメータとなる。

3. 伝達行列法を用いた方法

3. 1 周期構造物の固有振動特性

図-2に示すように、本対象構造物は、質点 n の質量を $m/2$ とし、質点0を固定端とすると周期構造物となる¹²⁾。この周期構造物の固定端に強制地動を与えた場合の支配方程式は、基本構造要素の伝達行列 T 、

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} 1 - \beta^2 & -1/k^* \\ k^* \beta^2 (2 - \beta^2) & 1 - \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -1/k^* \\ k^* \sin^2 \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ k^* &= (1+2hi)k \quad \cos \varphi = 1 - \beta^2 \\ \beta^2 &= \frac{\omega^2}{2 \frac{k^*}{m}} = \frac{\zeta^2}{2(1+2hi)} \end{aligned} \quad (18)$$

を用いて、

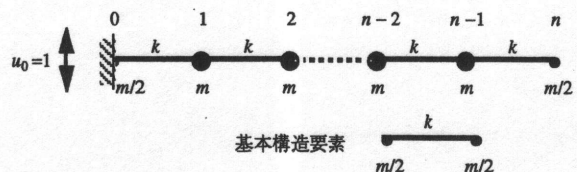


図-2 周期構造物に地動が作用する問題

$$\begin{pmatrix} u_n \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^n \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

と表すことができる。ここで、伝達行列 $\mathbf{T}$ の固有値 λ_i と固有ベクトル ϕ_i ,

$$\lambda_i = \cos \phi \pm i \sin \phi = \exp(\pm i \phi)$$

$$[\phi_i] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ ik^* \sin \phi & -ik^* \sin \phi \end{bmatrix} \quad (20)$$

を用いると、伝達行列 $\mathbf{T}$ の冪乗は、

$$\mathbf{T}^n = [\phi_i] [\lambda_i]^n [\phi_i]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos n \phi & -\frac{\sin n \phi}{k^* \sin \phi} \\ k^* \sin \phi \sin n \phi & \cos n \phi \end{bmatrix} \quad (21)$$

と表すことができる。この関係を(19)式に代入することにより、質点 n の変位応答を求めることができる。結果として各質点位置の変位応答は、

$$u_l = \frac{\cos(n-l)\phi}{\cos n \phi} \quad (l = 0, \dots, n) \quad (22)$$

と求められる。本問題の複素固有振動数は、上式の分母がゼロとなる場合に相当し、下式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_{n,\alpha} &= \frac{2\alpha-1}{2n}\pi \\ \omega_{n,\alpha} &= \omega_0 \sqrt{2(1+2hi)} \sqrt{1 - \cos \frac{2\alpha-1}{2n}\pi} \quad (\alpha = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (23)$$

なお、固有モードは(23)式を(22)式に代入することにより得られる。

3. 2 基礎固定時の固有振動特性

前節の結果を利用して、基礎固定時の等質量・等剛性構造物の応答値を求める。本問題は、図-3に示すように、周期構造物の端部(質点 n)に質量 $m/2$ を付加することに相当する。この質量の増加効果は、伝達行列 $\mathbf{T}_m$,

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{m\omega^2}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

を(19)式右辺に左から乗じることにより考慮することができる。すなわち、支配方程式は、

$$\begin{pmatrix} u_n \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_m \mathbf{T}^n \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n \phi & -\frac{\sin n \phi}{k^* \sin \phi} \\ 2k^* \sin \frac{\phi}{2} & \frac{\cos \frac{(2n+1)\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

と表すことができる。上式を解いた結果を利用すると、各質点の変位応答は、

$$u_l = \frac{\cos \frac{(2n-2l+1)\phi}{2}}{\cos \frac{(2n+1)\phi}{2}} \quad (l = 0, \dots, n) \quad (26)$$

と求めることができる。結果として、複素固有振動数は、上式の分母がゼロとなる条件の下で、

$$\begin{aligned} \phi_{n,\alpha} &= \frac{2\alpha-1}{2n+1}\pi \\ \omega_{n,\alpha} &= \omega_0 \sqrt{2(1+2hi)} \sqrt{1 - \cos \frac{2\alpha-1}{2n+1}\pi} \end{aligned} \quad (27)$$

と与えられる。なお、(27)式の分母を冪級数展開すると、(5)式に示した行列式の多項式展開が得られる。このように、伝達行列法の利用により固有振動数、モード形、伝達関数を陽に求めることができる。

3. 3 地盤のスウェイばねを考慮した固有振動特性

基礎(質点0)下にスウェイばねを考慮した場合には、質点0に質量 $m/2$ を付加すると共にスウェイばね・ダッシュポットを固定境界(G と記す)との間に設置する必要がある。この効果は、以下の伝達行列 $\mathbf{T}_G$,

$$\mathbf{T}_G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{k_H + i\omega c_H} \\ \frac{m\omega^2}{2} & 1 - \frac{m\omega^2}{2(k_H + i\omega c_H)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

を用いることにより考慮される。すなわち、

$$\begin{pmatrix} u_n \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_m \mathbf{T}^n \mathbf{T}_G \begin{pmatrix} 1 \\ p_G \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \frac{2n+1}{2}\phi}{\cos \frac{\phi}{2}} \\ \frac{(\kappa_H^* - 1) \sin n \phi + \sin(n+1)\phi}{\alpha k^* \sin \phi} \\ \frac{(\kappa_H^* - 1) \cos \frac{2n+1}{2}\phi + \cos \frac{2n+3}{2}\phi}{\cos \frac{\phi}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_G \end{pmatrix} \quad (29)$$

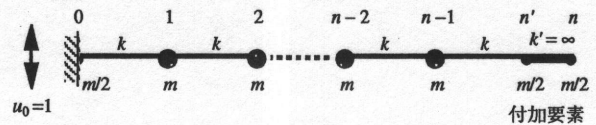


図-3 基礎固定モデルに地動が作用する問題

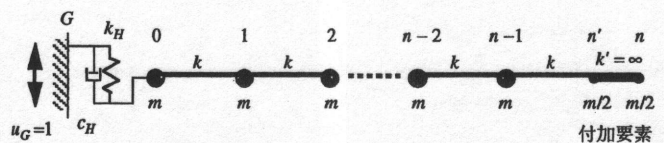


図-4 スウェイモデルに地動が作用する問題

と支配方程式が与えられる。ここに、

$$\begin{aligned}\kappa_H^* &= \frac{k_H + i\omega c_H}{k^*} = \kappa_H \frac{1 + 2h_H \zeta i}{1 + 2hi} \\ &= \kappa_H \frac{1 + 2h_H \sqrt{2(1+2hi)} \beta i}{1 + 2hi}\end{aligned}\quad (30)$$

である。(29)式から、各質点の変位応答は、

$$u_l = \frac{\kappa_H^* \cos \frac{2n-2l+1}{2} \varphi}{(\kappa_H^* - 1) \cos \frac{2n+1}{2} \varphi + \cos \frac{2n+3}{2} \varphi} \quad (l = 0, \dots, n) \quad (31)$$

と得られる。複素固有値は、上式の分母より、

$$\begin{aligned}\left(\kappa_H \frac{1 + 2h_H \sqrt{2(1+2hi)} \beta i}{1 + 2hi} - 1 \right) \cos \left(\frac{2n+1}{2} \cos^{-1}(1-\beta^2) \right) \\ + \cos \left(\frac{2n+3}{2} \cos^{-1}(1-\beta^2) \right) = 0\end{aligned}\quad (32)$$

で与えられる超越方程式から求められる。残念ながら、本問題の場合には固有振動数を陽に表示できない。ちなみに、(32)式を冪級数展開した結果は(14)式となる。

なお、スウェイ・ロッキングモデルの場合には、このような簡潔な表現が得られないので記述を省く。

4. 解析結果と考察

対象構造物として、直接基礎で支持された正方形平面のRC造ラーメン構造物を想定する。柱間隔 l 、スパン数 n_s 、単位面積当りの等価床荷重 w 、柱断面 $b \times b$ 、ヤング係数 E 、地盤の単位体積重量 γ 、せん断波速度 V_s 、ポアソン比 ν 、重力加速度 g を用いると、各階質量 m 、剛性 k 、回転慣性質量 j 、1階建非減衰固有円振動数 ω_0 は、

$$\begin{aligned}m &= \frac{w(nsl)^2}{g} \quad k = \frac{Eb^4}{H^3} (n_s + 1)^2 \quad j = m \frac{(nsl)^2}{12} \\ \omega_0 &= \frac{n_s + 1}{nslH} \sqrt{\frac{Eb^4 g}{wH}}\end{aligned}\quad (33)$$

と、スウェイおよびロッキングばねのばね定数と減衰係数は、剛基礎の静的ばね定数と波動インピーダンスを用いることにより、

$$\begin{aligned}k_H &= \frac{4.575 \gamma V_s^2 nsl}{g(2-\nu)} \quad k_\theta = \frac{0.5069 \gamma V_s^2 (nsl)^3}{g(1-\nu)} \\ c_H &= \frac{\gamma V_s (nsl)^2}{g} \quad c_\theta = \frac{\gamma V_s (nsl)^4}{12g \pi (1-\nu)}\end{aligned}\quad (34)$$

と求めることができる。結果として、(13)および(17)式に示した無次元量は下式で与えられる。

$$\begin{aligned}\kappa_H &= \frac{4.58 \gamma V_s^2 nsl H^3}{g(2-\nu) Eb^4 (n_s + 1)^2} \\ \kappa_\theta &= 0.333 \frac{nsl}{H} \sqrt{\frac{2-\nu}{1-\nu}} \quad \kappa_m = \frac{nsl}{3.46H}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_H &= \frac{(n_s + 1)(2-\nu)}{9.15 V_s H} \sqrt{\frac{Eb^4 g}{wH}} \\ h_\theta &= \frac{n_s + 1}{11.2 V_s H} \sqrt{\frac{Eb^4 g}{wH}}\end{aligned}\quad (35)$$

ここで、代表的なRC構造物と地盤の諸元として、

$$\begin{aligned}w &= 1.2 \text{ t/m}^2, l = 7 \text{ m}, H = 4 \text{ m}, b = 0.9 \text{ m} \\ E &= 2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2, h = 0.01, \gamma_t = 1.8 \text{ t/m}^3, \nu = 0.4\end{aligned}\quad (36)$$

を用いることとすると、(35)式の無次元量と1階建時の非減衰固有円振動数は、

$$\begin{aligned}\kappa_H &= \frac{V_s^2 n_s}{5860 (n_s + 1)^2} \quad \kappa_\theta = 0.951 n_s \quad \kappa_m = 0.505 n_s \\ h_H &= \frac{73.3 (n_s + 1)}{V_s} \quad h_\theta = \frac{37.3 (n_s + 1)}{V_s} \quad \omega_0 = 59.9 \frac{n_s + 1}{n_s}\end{aligned}\quad (37)$$

のように、スパン数 n_s と地盤のせん断波速度 V_s の関数になる。従って、動的相互作用を考慮した構造物の固有振動特性の検討は、構造物のスパン数 n_s と階数 n 、地盤のせん断波速度 V_s をパラメータとすればよいことが分かる。

4. 1 実固有値解析結果に基づく考察

まず、減衰を考慮しない非減衰固有振動数について考察する。図-5に n 階建構造物の非減衰固有円振動数を示す。結果は ω_0 に対する比として無次元化している。各図中では、基礎固定モデル、スウェイモデル、スウェイロッキングモデルの結果を比較している。(a)~(b)図から、解析モデルによる差異は、低層の場合や地盤のせん断波速度が小さい場合に低次モードに顕著に現われている。(b)図では、せん断波速度が増加すると、地盤との連成系の固有振動数が高次にシフトすると共に、構造物の固有振動数が基礎固定モデルのそれに漸近している。(c)図では、スパン数の増加と共に固有振動数が低下し基礎固定モデルとの差が大きくなっている。これは、(37)式に示したスウェイばねの剛性比 κ_H からも理解できるように、スパン数の増加と共にスウェイばねの剛性が相対的に低下するためである。また、小スパン時にスウェイロッキングモデルとスウェイモデルとの差異が大きいのは、ロッキングばねの剛性が小さくなるためである。従って、スパン数が大きい場合には動的相互作用を考慮することが望ましく、スパン数が非常に少ない場合にはロッキングばねの考慮が重要となる。

低次モードに動的相互作用効果が顕著に現われているので、1次モードに着目して非減衰固有周期比を図-2に示す。(a)図をみると、基礎固定モデルとスウェイモデルは固有周期と階数がほぼ線形関係となり、スウェイモデルは基礎固定モデルに対して長周期側に平行移動した結果となっている。これに対し、スウェイロッキングモデルは階数が増加するに従い周期の伸びが顕著とって非

線形な性状を示している。すなわち、高層の直接基礎構造物ではロッキングばねを考慮した解析の必要性が高い。(b)図を観察すると、地盤のせん断波速度が小さい場合に、動的相互作用を考慮したモデルはかなり長周期の固有周期となっている。この傾向はロッキングばねを考慮したスウェイロッキングモデルの方が顕著である。また、スパン数(構造物の平面サイズ)の影響を観察した(c)図では、スウェイモデルの場合には小スパン時に基礎固定モデルに近い結果を与えているが、スパンの増加と共に周期が伸びている。

以上の傾向を数式的に確認するために、重力式を用いた固有周期の近似式を誘導する。自重に等しい水平力を受けたときの本対象構造物の頂部変位 δ は、スウェイロッキングモデルに対して、

$$\delta = \frac{mg}{k} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{\kappa_H} + \frac{n(n+1)^2}{2\kappa_H \kappa_\theta^2} \right) \quad (38)$$

と求めることができる。上式において、第1項は構造物の弾性変位寄与分、第2項はスウェイ量、第3項はロッキングによる変位量である。(38)式を、重力式、

$$T_n = 2\pi \sqrt{\delta/g} \quad (39)$$

に代入することにより、各解析モデルの固有周期を、

$$\begin{aligned} T_n^{fix} &= T_1 \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \\ T_n^{sway} &= T_1 \sqrt{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{\kappa_H}} \\ T_n^{SR} &= T_1 \sqrt{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{\kappa_H} + \frac{n(n+1)^2}{2\kappa_H \kappa_\theta^2}} \end{aligned} \quad (40)$$

のように求めることができる。図-6には、(40)式により算定した固有周期も併せて示してある。重力式による結果は周期をやや長く評価する傾向はあるが、動的相互作用効果による固有周期の変動特性をよく捉えている。さらに、(40)式を近似表現すると、

$$\begin{aligned} T_n^{fix} &\approx T_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ T_n^{sway} &\approx T_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa_H} \right) \\ T_n^{SR} &\approx T_1 \frac{1}{\sqrt{2\kappa_H \kappa_\theta^2}} \left(\sqrt{n^3} + \left(1 + \frac{\kappa_H \kappa_\theta^2}{2} \right) \sqrt{n} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

が得られる。この結果は先に示した非減衰時の固有周期と階数との関係を明確に表している。新耐震設計法¹⁾などで利用されている固有周期の概算式は単純に階数の係数倍となっているが、(41)式はスウェイ量に応じた定数値を付加する必要性を示している。さらに、高層の構造物でかつロッキング動が卓越する場合には周期の伸びを考慮することが必要となる。

なお、図5~6に示した結果は直接基礎に対するものであるが、杭基礎(支持杭)の場合には、相対的にロッキングばねの剛性が大きくなる(κ_θ が大きくなる)ので、スウェイモデルの結果に近づくことになる。

4. 2 複素固有値解析結果に基づく考察

つぎに、減衰を考慮した場合について検討する。まず、図-7に複素固有値から求めた固有振動数と減衰定数の関係を、図-8~9に固有振動数と減衰定数の階数 n 、地盤のせん断波速度 V_s 、建物スパン数 n_s 依存性を示す。各図中には、基礎固定時とは明らかに異なる固有振動数が、スウェイモデルの場合には1組、スウェイロッキングモデルの場合には2組存在している。これらの振動数は構造物-地盤連成系の固有振動数に対応し、減衰定数が非常に大きい。とくにスウェイに関しては殆どが過減衰となっている。ロッキングに関しては減衰振動状態となっており、階数、地盤のせん断波速度、スパン数による振動数の変化が大きい。このように、構造物-地盤連成系の固有振動数は図-5に示した非減衰時の特性とは全く異なっており、減衰の考慮を前提とした複素固有値解析の必要性を強く示唆している。

構造物系の固有振動数に関しては、解析モデルによる固有振動数の差異が実固有値解析の結果(図-5)に比べて減少しており、解析モデルによる差異は減衰定数に顕著に現れている。まず、解析モデルによる固有振動数の差異については、いずれも1次モードに中心に現れており、2次以上の高次モードでは差異が小さい。差異が生じているのは、地盤が軟弱な場合や、小スパンかつスウェイロッキングモデルの場合である。この傾向を明確にするために、図-10に構造物系1次モードの固有周期を示す。実固有値解析結果の図-6と比較すると解析モデル間の差異が減少していることが分かる。そこで、減衰の考慮の有無によるスウェイモデルの固有振動数を基礎固定時の固有振動数と比較して図-11に示す。図のように、非減衰時のスウェイモデルの固有振動数は基礎固定モデルとの差異が大きい、減衰を考慮すると基礎固定モデルとほぼ一致している。このように、減衰を無視した実固有値解析は動的相互作用による固有振動数の変化を過大に評価する傾向がある。すなわち、実固有値解析に基づく地震応答解析(比例減衰モデルを用いた解析)では、動的相互作用の影響を適切に反映できていないことを意味する。

一方、減衰定数については、低次モードの減衰定数が大きく増大しており、高次にまで広範に減衰の増加効果が現れている。しかし、次数の増加と共に構造物の内部減衰に等しい1%に収束している。これらの特徴は、せん

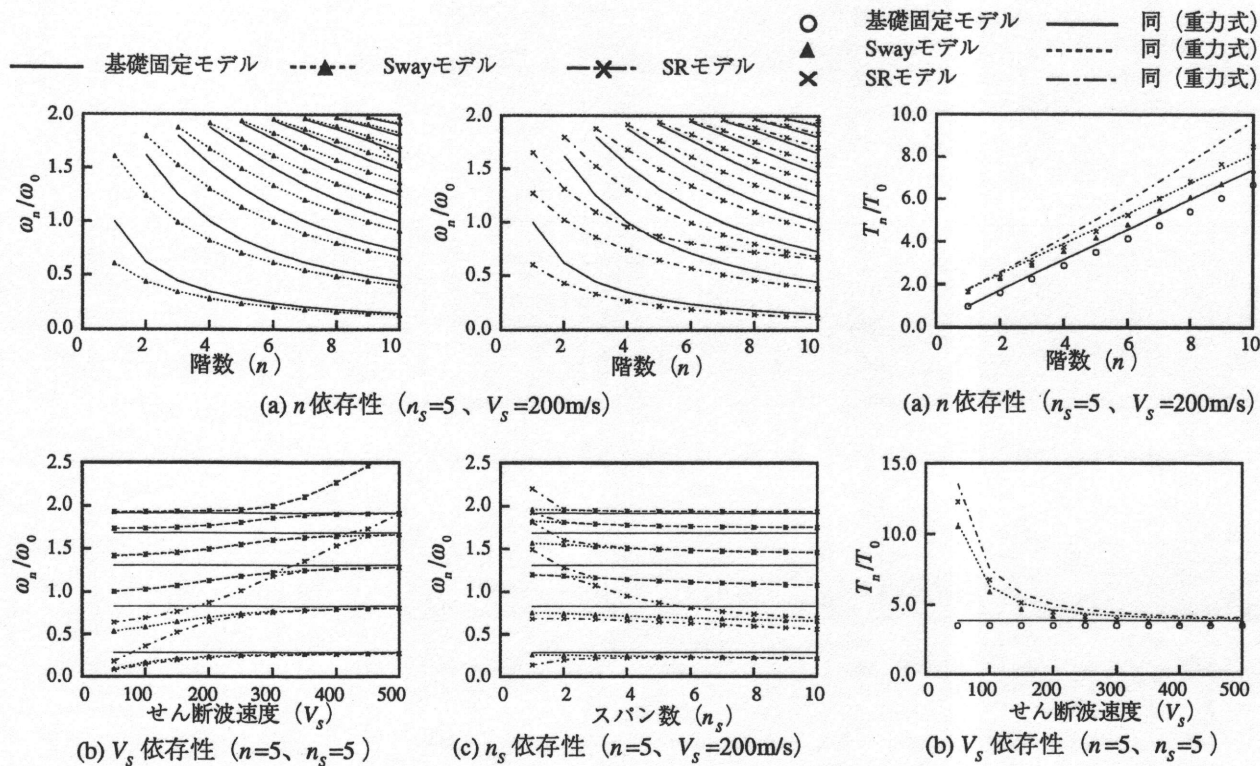


図-5 非減衰時の固有円振動数

断波速度が小さく、スパン数が大きい場合に顕著となっている。このような減衰定数の特徴は以下のように説明できる。すなわち、構造物-地盤連成系の振動数に近くスウェイ量が相対的に大きい低次モードでは逸散減衰に伴う減衰増加効果が大きく現れる。これに対して、構造物の変形が支配的となる高次モードでは構造物の内部減衰に収束する。逸散減衰効果は、地盤のせん断波速度が小さく、基礎サイズが大きい場合に大きく現れるので、上記の特徴が説明できる。このように、動的相互作用効果が減衰定数に与える影響が顕著なので、5階、10階、40階建構造物のスウェイモデルを例として、

構造物系固有モードの減衰定数を整理した結果を図-12に示す。図のように、減衰の増加の程度は、軟弱な地盤に立地する低層かつ平面規模が大きい建物の場合に顕著であり、図に示した例では最大15%の減衰となっている。中低層建物の場合には、高次モードになるに従って減衰定数は減少しているが、高層建物（40階建）の場合には、一旦減衰定数が増加した後高次で減衰が減少している。したがって、既往の実験資料で指摘されている高次増大型の減衰⁴⁻⁶⁾は適用範囲を明確にすることが必要になる。高次増大型の減衰に関する既往の資料は、実験資料が高層建物に偏っていること、比較的 low 次モードの減衰定数に着目していることなどから、(c)図の低次の特性を観察していたことに相当すると考えられる。本結果と図-7(a)を参考にすると、固有周期と減衰定数の積が一定値となるとの指摘⁸⁻⁹⁾は、高層建物の1次モードについては適用可能であるが、2次以上のモードに対しては適用できないことが分かる。一般に、中低層建物の場合、実測記録から信頼度の高い減衰定数を同定することは比較的難しく、実験資料も少ない。このことが、相互作用系の減衰特性に関する誤解を生む原因となっていると考えられる。明らかに、(a)図や(b)図は高次減少型の減衰となっており、剛性比例型減衰などの高次増大型の減衰の利用に対して否定的な結果となっている。

4.3 地動に対する構造物の伝達関数に基づく考察

最後に、地動に対する伝達関数の特性を通して、動的相互作用効果を検討する。図-13に、(26)式および(31)式を用いて算定した建物頂部応答について、基礎固定モデルとスウェイモデルを比較して示す。スウェイモデルとしては、減衰のモデル化の影響を検討するために、全ての減衰を複素減衰(1%)により考慮したもの、内部減衰を剛性比例型

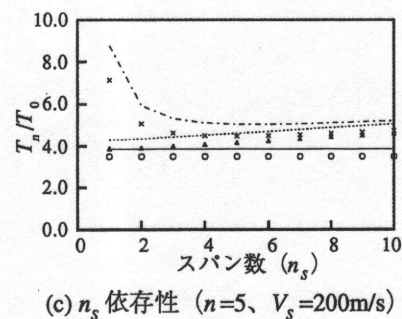


図-6 非減衰時の1次固有周期と重力式

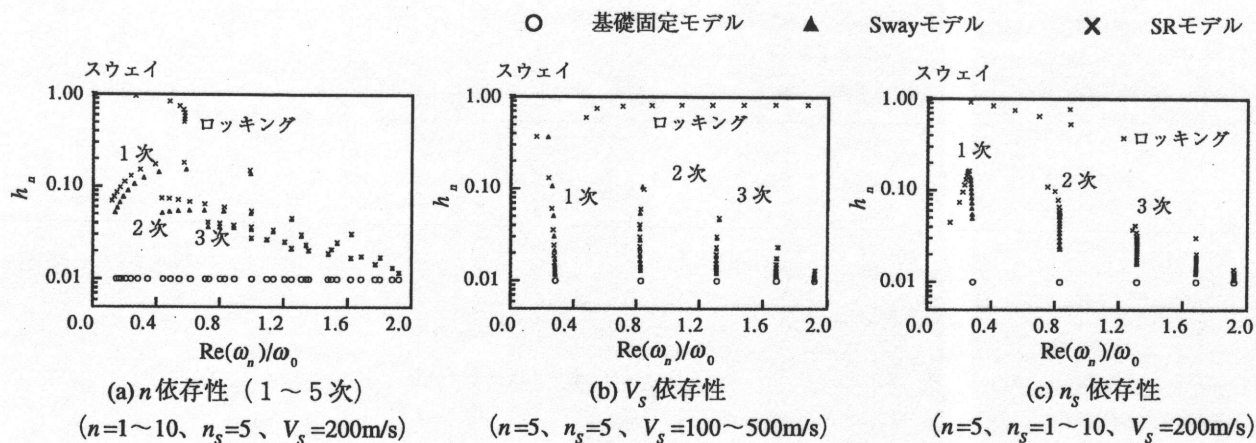


図-7 固有振動数と減衰定数の関係

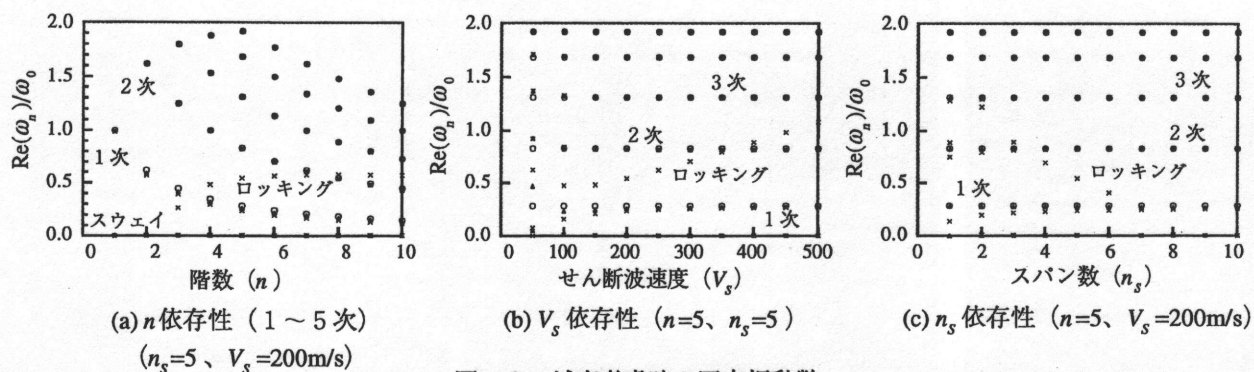


図-8 減衰考慮時の固有振動数

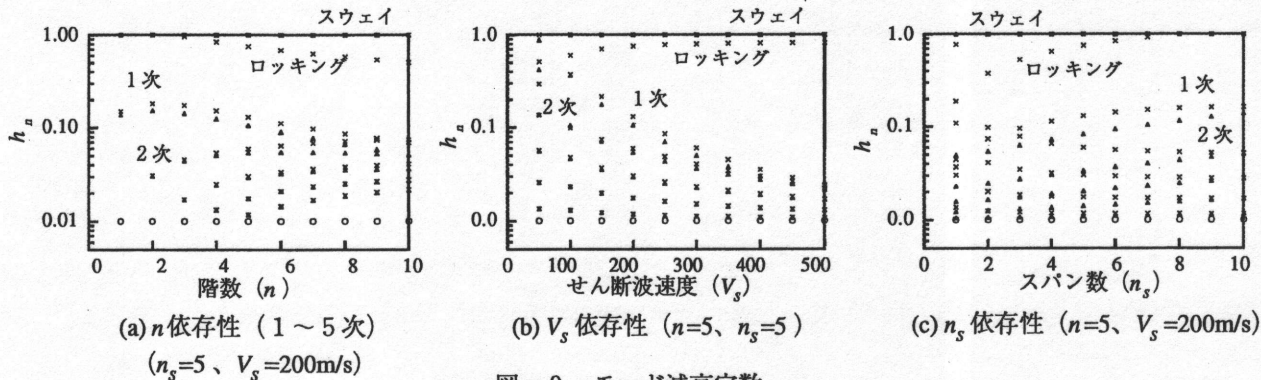


図-9 モード減衰定数

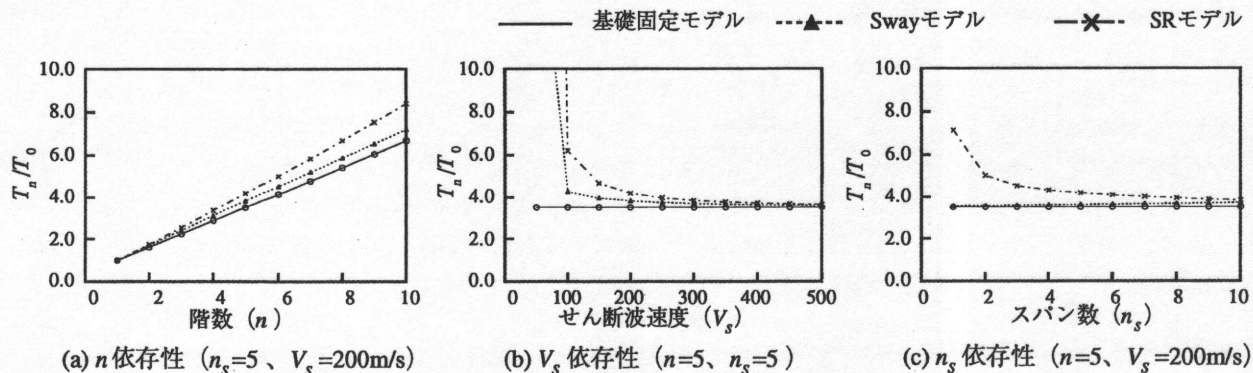


図-10 減衰考慮時の構造物の1次固有周期

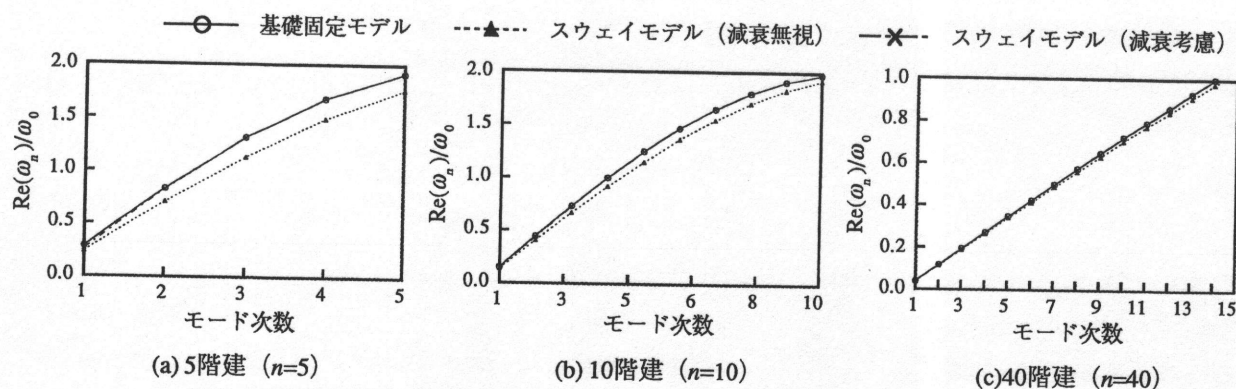


図-1 1 減衰の考慮の有無による固有振動数の差異 ($n=5$, $n_s=5$, $V_s=200\text{m/s}$)

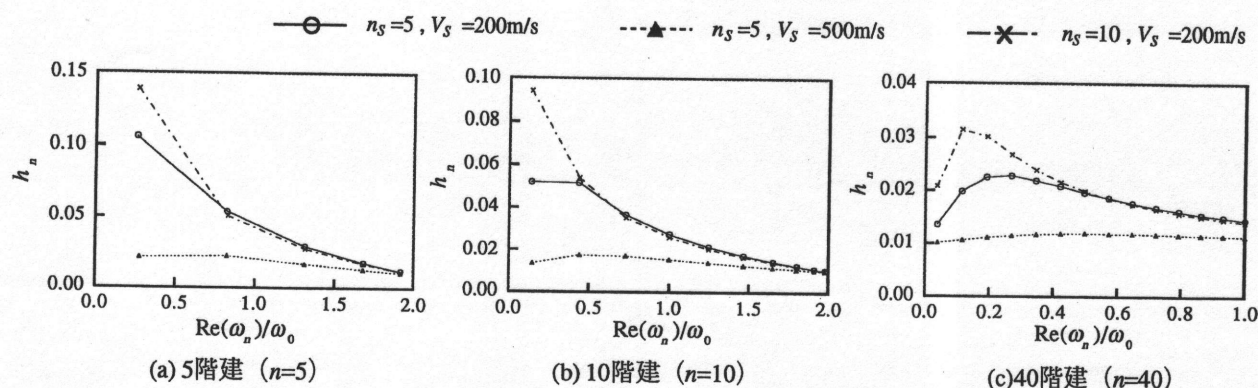


図-1 2 スウェイモデルの固有振動数とモード減衰定数の関係

減衰（各部型：1次固有振動数で1%）で考慮したもの、もあわせて示した。前者は比例減衰を想定したことになる。図より、スウェイモデルのピーク振動数は基礎固定モデルに近く、ピーク高さは振動数の増加と共に一様に減少していない。これに対して、比例減衰を前提とした結果は固有振動数を低めに評価している。また、剛性比例型減衰を利用した結果は固有振動数の対応はよいものの2次以上のピーク高さをかなり過小評価している。これらの傾向は中低層建物の場合に顕著に現れており、前節で指摘した固有振動数と減衰定数の特徴に対応する。

つぎに、構造物内の応答分布の考察のために、図-1 4にスウェイモデルの頂部・中間階・基礎部の応答を示す。図のように、基礎部と頂部とでは位相が異なっており、構造物は位相差をもって振動している。このことは、比例減衰モデルのように固有モードが実数となる解析モデルの利用が好ましくないことを意味している。

5. 結論

動的相互作用効果が構造物の固有振動特性に及ぼす影響を明らかにするために、剛性・質量等分布せん断型構造物を対象に、動的係数行列の三重対角性に着目した行

列式の多項式展開に基づく方法、構造物の周期性に着目した伝達行列法に基づく方法を提示し、数値解析例を通して、以下の結論を得た。

- 1) 実固有値解析は、相互作用ばねを考慮すると固有振動数を過度に減少させる傾向がある。したがって、比例型減衰を利用した解析では、動的相互作用効果による固有振動特性の変化を適切に考慮できない。
- 2) 逸散減衰を考慮すると、固有振動数は基礎固定時のそれとほぼ一致し、減衰定数の増加効果が大きい。また、構造物-地盤連成系のモードは過減衰となる場合が多い。この特徴は、軟弱地盤に立地する平面規模の大きい中低層建築物に顕著となる。
- 3) 逸散減衰に伴う減衰の増加効果は、低次モードに現れ、中低層建物の減衰は高次減少型となる。高層建物の場合には低次で増加した後減少する。このことは、剛性に比例するタイプの高次増大型減衰の適用が好ましくないことを示している。
- 4) 構造物の非減衰1次固有周期と階数との関係は、ロッキング動が卓越しない場合にはほぼ比例関係にあるがスウェイ量に応じて定数値を付加する必要がある。ロッキング動が卓越する高層建物の場合にはより長周期化する。

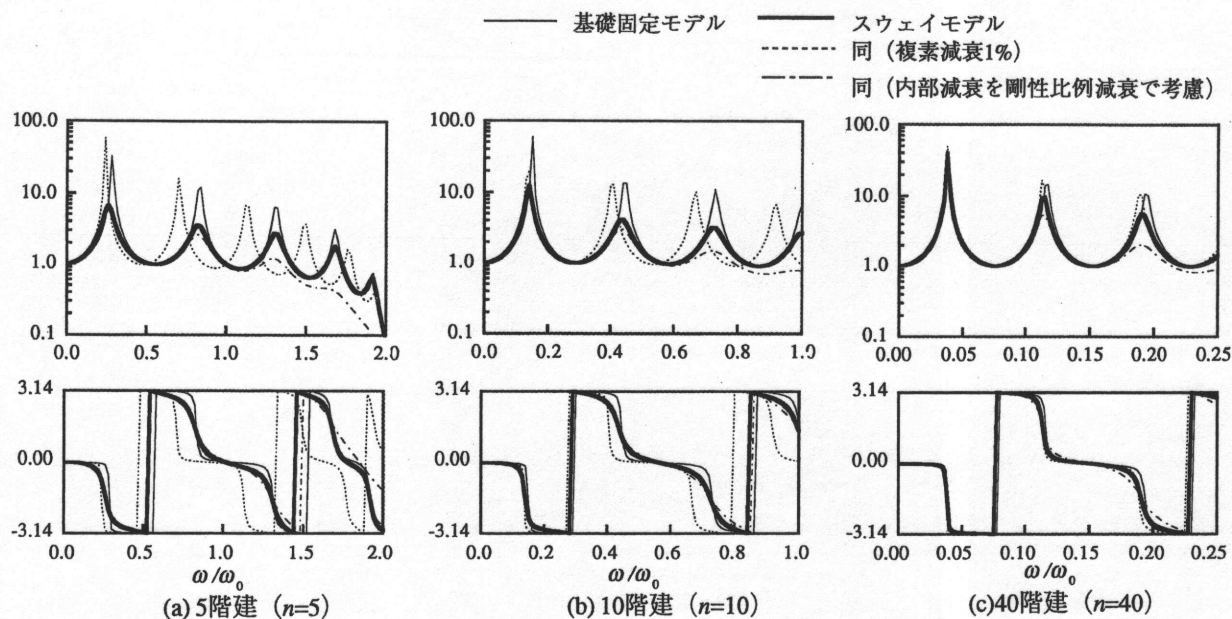


図-1 3 地動入力に対する伝達関数の振幅と位相の解析モデルによる差異 ($n_s=5$, $V_s=200\text{m/s}$)

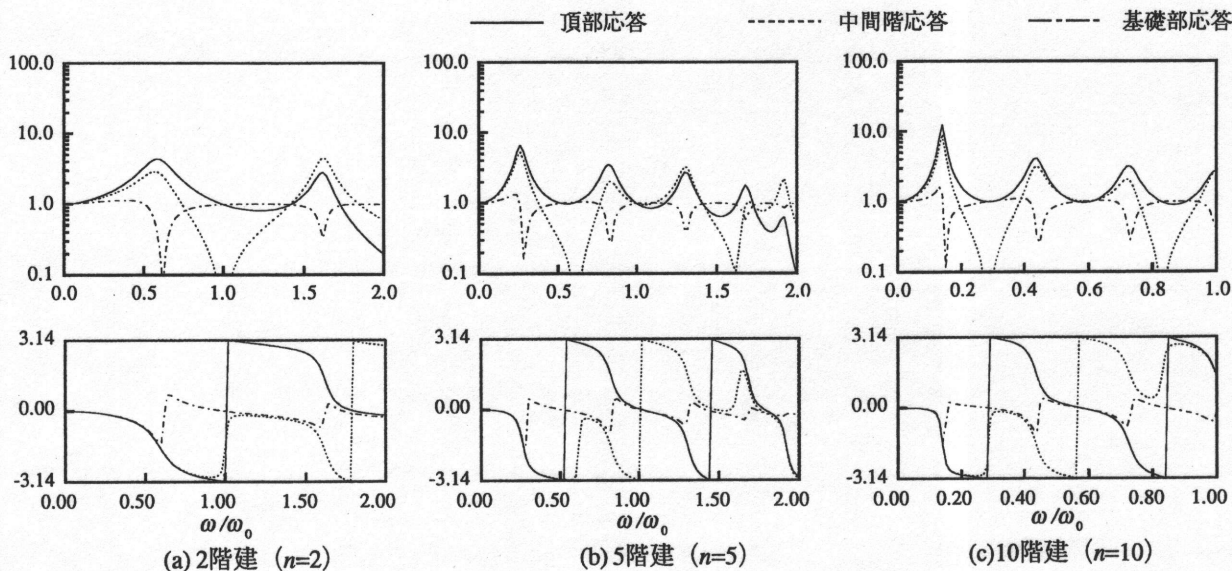


図-1 4 スウェイモデルの地動入力に対する伝達関数 ($n_s=5$, $V_s=200\text{m/s}$)

参考文献

- 建設省住宅局建築指導課, 建設省建築研究所: 改正建築基準法施行令新耐震基準に基づく構造計算指針・同解説, 日本建築センター, 1981
- 日本建築学会: 建築構造物の振動実験, 丸善, 1978
- 日本建築学会: 建築物の耐震設計資料, 丸善, 1981
- 建築物の減衰評価研究会: 建築物の減衰評価研究報告書, 日本建築センター, 1993
- Y. Tamura, M. Yamada and H. Yokota: Estimation of Structural Damping of Buildings, ASCE Structures Congress XII, pp.1012-1027, 1994
- 横田治彦, 佐武直紀, 岡田敬一: 振動試験および地震観測データに基づく鉄骨造高層建物の減衰性状, 日本建築学会構造系論文報告集, 第453号, 1993, pp.77-84
- 大場新太郎: 基礎・地盤条件が実在建築物の固有周期に及ぼす影響, 日本建築学会論文報告集, 第317号, 1982
- 日本建築学会: 地震荷重—その現状と将来の展望, 丸善, 1987
- Kobayashi, H.: Damping Coefficients of Strutral Vibration Related to Subsoil Conditions, 5th WCEE, 1973
- 井口道雄: 構造物と地盤の動的相互作用の概念, 構造物と地盤の動的相互作用シンポジウム, 日本建築学会, pp.1-8, 1985
- Veletsos, A.S. and Y.T. Wei: Lateral and Rocking Vibration of Footings, ASCE, Soil Mech. and Foundations Div., Vol.97, No. SM9, pp.1227-1248, 1971
- 福和伸夫, 勝倉裕, 中井正一: 離散解析モデルにおける波動の分散性と最適整合質量比の提示, 日本建築学会構造系論文報告集, 第433号, 1992, pp.83-90
- 福和伸夫: 動的相互作用効果が構造物の固有振動特性に及ぼす影響に関する考察, 建築学会学術講演梗概集B, 1994, pp.583-584

(1994年7月8日原稿受理, 1995年5月22日採用決定)