

等速移動点加振力に対する3次元均質等方弾性体の 基本解に関する研究

交通振動による地盤の応答性状に関する解析的研究

A STUDY ON THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF A HOMOGENEOUS ISOTROPIC ELASTIC MEDIUM DUE TO A MOVING EXCITATION WITH CONSTANT VELOCITY

An analytical study on the dynamic response of a soil due to a traffic excitation

福和伸夫*, 梅村健次**, 多賀直恒***

Nobuo FUKUWA, Kenji UMEMURA and Naotsune TAGA

In order to study the dynamic response of a soil due to traffic loads such as a mobile and a train, the fundamental solution of a three dimensional homogeneous isotropic elastic medium due to a point excitation which moves with constant velocity is derived here using Fourier integral method and convolution technique. A frequency response and a time response are explicitly presented. An effect of the moving velocity is examined from the view points of the frequency content, envelope and attenuation. These results are compared with those of two dimensional and three dimensional solutions of a fixed point harmonic excitation.

Keywords: moving excitation, three dimensional elastic medium, fundamental solution, Doppler effect, Fourier integral, convolution

移動加振, 3次元弾性体, 基本解, ドップラー効果, フーリエ積分, 合成積

1. はじめに

近年, 科学設備, 生産設備, 情報機器などの精密化に伴い, 地盤の微振動が精密機器設置上クリティカルな問題となる建築物が増えてきた。半導体工場, 電子顕微鏡施設, 加速器施設などの施設がこれに当たる。これらの施設が道路や鉄道に近接した場所に設置される例も多く, 交通振動問題が設計上重要なテーマとなってきた。一方, 駅再開発に伴い高層建築物が線路上に建設される計画も多く, 居住性の観点からの検討の必要性も高まっている。こういった交通外乱に伴う振動は, 車両などの加振源が移動しながら地盤に振動外力を与え, 地盤内を波動伝播し, 構造物と地盤との動的相互作用を介して構造物に入力される。したがって, 交通振動問題を考えるうえでは, 移動加振源に対する地盤応答性状を考察することが第一の出発点となる。

そこで本研究では, 交通振動外乱による地盤の応答性状に関する基礎資料を得ることを目的として, 交通外乱を等速で移動する定常点加振力に置換し, 地盤を3次元均質等方全無限弾性媒体で置き換えた場合の弾性波動解を誘導する。解の誘導は, フーリエ積分法に基づいて行い, 既往の3次元点加振解¹⁾および2次元点加振解²⁾との比較を通して, 解の性状を考察する。弾性体の支配方程式から出発して, 時間と座標に関するフーリエ変換を行った後に, フーリエ変換場の変位解を誘導する。2次元, 3次元定常点加振力, ならびに, 3次元等速移動定常点加振力を定義したうえで, フーリエ逆変換を施すことにより, 各基本解を統一的に誘導する。ただし, 2次元および3次元点加振解は陽な解析表現が可能となるのに対し, 移動点加振解は振動数成分の陽な表現はできるものの振動数に関する無限積分が残った形となる。そこ

* 名古屋大学工学部建築学科 助教授・博士(工学)

** 名古屋大学工学部建築学科 大学院生

*** 名古屋大学工学部建築学科 教授・博士(工学)

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Nagoya Univ., Dr. Eng.

Graduate Student, Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Nagoya Univ.

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Nagoya Univ., Dr. Eng.

で、別途、3次元点加振解からインパルス応答を求め、加振外力を等速移動させた場合の合成積を評価することにより移動点加振解を誘導する方法についても示す。この方法を用いた場合には、一部、定積分が含まれるものの、かなり見通しのよい解を得ることが可能となる。

移動外乱に対する既往の研究としては、半無限地盤の地表面を静荷重が等速移動する問題を解析的に取り扱った Eason³⁾ や Gakenheimer ら⁴⁾ による研究、定常移動加振外力に対する薄層法と有限要素法による花里ら⁵⁾ の研究などがある。断層震源モデルの研究分野においても移動震源問題としての取り扱いが行われているが、交通振動問題の観点から、動的な移動加振力が作用した問題を弾性波動論に基づいて解析的に検討した研究は少ない。解析解は解を陽に表現できるので、加振外力の移動に伴う効果を解の表現から洞察することができ、離散解では得られない考察が可能である。本論では、解の解析表現ならびに変位応答性状を2次元解および3次元解と比較することにより、加振源の移動速度の効果についての考察を行う。考察のポイントは加振源の移動に伴う応答波形の振動数特性、包絡形状、継続時間、距離減衰特性についてである。なお、本論で対象とするのは全無限媒体であるので実体波のみが存在する問題となる。ラブ波やレーリー波などの表面波が存在する問題については次報以降で紹介することとする。

2. 動弾性問題の基本式

3次元弾性体の支配方程式は下式で与えられる。まずひずみ ε_{ij} と変位 u_i の関係は、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

となる。ここに、下添字 i, j は方向成分を示し、総和規約を用いることとする。また、応力 σ_{ij} とひずみの関係は、ラメの定数 μ, λ を用いることにより

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

と、釣合方程式は、

$$\sigma_{j,i,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3)$$

と表される。ここに、 δ_{ij} はクロネッカのデルタ関数、 X_i は単位体積当たりに作用する物体力、 ρ は質量密度である。上3式から以下のナビエの方程式が得られる。

$$\mu u_{i,j,j} + (\lambda + \mu) u_{\alpha,\alpha,i} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4)$$

3. フーリエ積分法による基本解の誘導

(4) 式を時間 t と座標 x_1, x_2, x_3 に関してフーリエ変換する。

$$\bar{A} = A(k_1, k_2, k_3, \omega) = \iiint_{-\infty}^{\infty} A(x_1, x_2, x_3, t) \cdot e^{-i\omega t} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots (5)$$

結果として、(4) 式はフーリエ変換場では、

$$-\mu k_\alpha k_\alpha \bar{u}_i - (\lambda + \mu) k_i k_j \bar{u}_j + \rho \omega^2 \bar{u}_i + \bar{X}_i = 0 \quad (6)$$

となり、フーリエ変換場の変位に対する連立代数方程式となる。(6) 式を変位に関して解くと、

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\bar{X}_i}{\xi^2 - h_s^2} - \frac{k_i k_j}{h_s^2} \left(\frac{1}{\xi^2 - h_s^2} - \frac{1}{\xi^2 - h_p^2} \right) \bar{X}_j \right] \quad (7)$$

が得られる。ここに、上式の各諸量は、

$$\left. \begin{aligned} V_s &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, & V_p &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ h_s &= \frac{\omega}{V_s}, & h_p &= \frac{\omega}{V_p} \\ \xi^2 &= k_\alpha k_\alpha, & \gamma &= \frac{V_s}{V_p} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

である。

一方、 x_2 軸上を振動数 p の定常点加振力が等速度 V で移動しながら作用する問題を想定すると、物体力は、

$$X_i = f_i \delta(x_1) \delta(x_2 - Vt) \delta(x_3) e^{i\omega t} \dots (9)$$

と定義できる。これは、フーリエ変換場では、

$$\bar{X}_i = 2\pi f_i \delta(\omega - p - k_2 V) \dots (10)$$

となる。ちなみに、3次元点加振問題では、物体力は、

$$X_i = f_i \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) e^{i\omega t} \leftrightarrow \bar{X}_i = 2\pi f_i \delta(\omega - p) \quad (11)$$

と、2次元点加振問題では、

$$X_i = f_i \delta(x_1) \delta(x_3) e^{i\omega t} \leftrightarrow \bar{X}_i = 4\pi^2 f_i \delta(k_2) \delta(\omega - p) \quad (12)$$

と定義される。求めるべき変位解は(7)式の物体力の項に(10)~(12)式を代入し、フーリエ逆変換することにより得られる。以降では、加振外力が X_2 方向のみに作用すると考えることにする ($f_3 \neq 0, f_1 = f_2 = 0$)。

(10)~(12)式から、いずれの外力もフーリエ変換場では k_1, k_3 に依存しないので、最初に k_1 と k_3 に関してフーリエ逆変換する。これはハンケル逆変換に置換でき、

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A(x_1, k_2, x_3, \omega) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(k_1, k_2, k_3, \omega) e^{-ik_1 x_1} e^{-ik_3 x_3} dk_1 dk_3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \xi \bar{A}(k_1, k_2, k_3, \omega) J_0(\xi r) d\xi \dots (13) \end{aligned}$$

ここに、 $r^2 = x_1^2 + x_3^2, \xi^2 = k_1^2 + k_3^2$ となる。ただし、上式中の $\bar{A}$ は $\bar{A}(k_1, k_2, k_3, \omega) = k_i k_j B(k_2, \omega)$ の形で表されることを前提としている。結果として、以下の積分公式(文⁶⁾ [6.532.4])を利用することができる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 + (k_2^2 - h_s^2)} J_0(\xi r) d\xi = \frac{1}{2\pi} K_0(r \sqrt{k_2^2 - h_s^2})$$

ただし $0 \leq \arg(k_s^2 - h_s^2) < 2\pi$ (14)
したがって、(7) 式は、(14) 式を利用することにより、

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = & u_i(x_1, k_2, x_3, \omega) = \frac{1}{2\pi\mu} \left[K_0(r\sqrt{k_s^2 - h_s^2}) \bar{X}_i \right. \\ & \left. - \frac{k_i k_j}{h_s^2} |K_0(r\sqrt{k_s^2 - h_s^2}) - K_0(r\sqrt{k_s^2 - h_p^2})| \bar{X}_j \right] \\ & \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

と k_1 と k_3 に関してフーリエ逆変換される。

2 次元点加振問題の場合には、上式に (12) 式を代入して t と k_2 に関してフーリエ逆変換し、

$$K_0(r\sqrt{k_s^2 - h_s^2}) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(r\sqrt{h_s^2 - k_s^2}) \dots\dots\dots (16)$$

の関係と、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(r\sqrt{h_s^2 - k_s^2}) \delta(k_2) \delta(\omega - p) \\ \cdot e^{-ik_s x_2} e^{i\omega t} dk_2 d\omega = H_0^{(2)}(k_s r) e^{ipt} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\text{ここに、} k_s = \frac{p}{V_s}, \quad k_p = \frac{p}{V_p}$$

を用いることにより

$$\begin{aligned} u_j^{(2)} = & \frac{if_3 e^{ipt}}{4\mu} \left[-H_0^{(2)}(k_s r) \delta_{j3} \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_s^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3} \{H_0^{(2)}(k_p r) - H_0^{(2)}(k_s r)\} \right] \\ & \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

と変位解を求めることができる。ここに、上添字 (2) は 2 次元点加振解であることを表す。(18) 式は、微分を施すことにより、

$$\begin{aligned} u_j^{(2)} = & \frac{if_3 e^{ipt}}{4\mu} \left[-H_0(k_s r) \delta_{j3} \right. \\ & + \frac{1}{k_s r} \frac{2x_j x_3 - r^2 \delta_{j3}}{r^2} \{\gamma H_1^{(2)}(k_p r) - H_1^{(2)}(k_s r)\} \\ & \left. - \frac{x_j x_3}{r^2} [\gamma^2 H_0^{(2)}(k_p r) - H_0^{(2)}(k_s r)] \right] \quad (j=1, 3) \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

と陽な変位解が求められる。

次に、3 次元点加振問題の場合には、(11) 式を (15) 式に代入し、積分公式 (文⁶) [6.677.5]、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(r\sqrt{k_s^2 - h_s^2}) e^{-ik_s x_2} dk_2 = \frac{1}{2R} e^{-ik_s R} \dots\dots\dots (20)$$

$$\text{ここに、} R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

を用いることにより、

$$\begin{aligned} u_j^{(3)} = & \frac{f_3 e^{ipt}}{4\pi\mu} \left[\frac{1}{R} e^{-ik_s R} \delta_{j3} + \frac{1}{k_s^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3} \left\{ \frac{1}{R} e^{-ik_s R} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{R} e^{-ik_p R} \right\} \right] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

と解が得られ、微分を実行することにより、

$$u_j^{(3)} = \frac{k_s f_3 e^{ipt}}{4\pi\mu} \langle \frac{1}{k_s R} e^{-ik_s R} \delta_{j3}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{(k_s R)^3} \left[-(1 + ik_s R) \delta_{j3} \right. \\ & \left. + \frac{x_j x_3}{R^2} \{3 + 3 ik_s R - (k_s R)^2\} \right] e^{-ik_s R} \\ & - \frac{1}{(k_s R)^3} \left[-(1 + ik_p R) \delta_{j3} \right. \\ & \left. + \frac{x_j x_3}{R^2} \{3 + 3 ik_p R - (k_p R)^2\} \right] e^{-ik_p R} \dots\dots (22) \end{aligned}$$

と、陽な変位解が求められる。なお、(19) 式および (22) 式に示した結果は既往の解に一致している^{1), 2)}。

3 次元移動点加振問題の場合には、(10) 式を (15) 式に代入し、波数 k_2 と振動数 ω に関してフーリエ逆変換することにより解が得られる。

$$\begin{aligned} u_1^{(m)} = & \frac{e^{i\alpha x_2/V}}{8i\pi\mu V} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V_s}{\omega} \right)^2 \\ & \cdot \left[H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) \right. \\ & \left. - H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_p} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) \right] e^{i\omega(t - x_2/V)} d\omega \\ u_2^{(m)} = & -\frac{e^{i\alpha x_2/V}}{8\pi\mu V} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V_s}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega - p}{V} \right) \\ & \cdot \left[H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) \right. \\ & \left. - H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_p} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) \right] e^{i\omega(t - x_2/V)} d\omega \\ u_3^{(m)} = & \frac{e^{i\alpha x_2/V}}{8i\pi\mu V} \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{V_s}{\omega} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left\{ H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_p} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) \right\} \right] e^{i\omega(t - x_2/V)} d\omega \end{aligned}$$

ただし、

$$-2\pi < \arg \left\{ \left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2 \right\} \leq 0 \quad (\alpha = S, P) \dots\dots\dots (23)$$

しかし、移動加振問題の場合には、振動数に関する無限積分が残った形で解が表現される。このことは、加振源の移動によってすべての振動数成分が励起されることを意味しており、その振動数成分は (23) 式の被積分関数として陽に示される。なお、(23) 式第 3 式の第 1 項のみは積分公式を用いて解析的に積分することができる。すなわち、

$$\eta = \frac{\omega}{p} - \frac{1}{1 - v^2}, \quad v = \frac{V}{V_s} \dots\dots\dots (24)$$

なる変数変換を行い、積分公式 (文⁶) [6.616.4] を用いることにより、

$$\frac{e^{i\alpha x_2/V}}{8i\pi\mu V} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_s} \right)^2 - \left(\frac{\omega - p}{V} \right)^2} \right) e^{i\omega(t - x_2/V)} d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{8 i \pi \mu V} e^{i \frac{p}{1-v^2} (t - \frac{v^2 x_2}{V})} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left(\frac{p r}{V_s} \frac{\sqrt{1-v^2}}{v} \sqrt{\frac{v^2}{(1-v^2)^2} - \eta^2} \right) e^{i p \eta t - x_2 / v} d\eta \\
&= \frac{1}{4 \pi \mu} \frac{e^{i \frac{p}{1-v^2} \frac{1}{V_s} (V_s t - v x_2 - \sqrt{(x_2 - V t)^2 + (1-v^2) r^2})}}{\sqrt{(x_2 - V t)^2 + (1-v^2) r^2}} \dots (25)
\end{aligned}$$

と求めることができる。

4. 3次元インパルス応答からの移動加振解の誘導

移動加振解は、3次元点加振解からも誘導することができる。すなわち、3次元点加振解 (21) 式からインパルス応答を求め、加振力を等速で移動させながら合成積を評価することにより得ることができる。まず、3次元点加振解のインパルス応答は、超関数のフーリエ変換の性質⁷⁾,

$$\left. \begin{aligned} \delta \left(t - \frac{R}{V_s} \right) &\leftrightarrow e^{-i k_s R} \\ \left(t - \frac{R}{V_s} \right) U \left(t - \frac{R}{V_s} \right) &\leftrightarrow -\frac{1}{p^2} e^{-i k_s R} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

を用いて、以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
h_f(t) &= \frac{f_3}{4 \pi \mu} \left[\frac{1}{R} \delta \left(t - \frac{R}{V_s} \right) \delta_{j3} \right. \\
&\quad - V_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3} \frac{1}{R} \left\{ \left(t - \frac{R}{V_s} \right) U \left(t - \frac{R}{V_s} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(t - \frac{R}{V_p} \right) U \left(t - \frac{R}{V_p} \right) \right\} \right] \dots (27)
\end{aligned}$$

ここに、 $U(t)$ はステップ関数であり、 $h(t)$ はインパルス応答を表すものとする。なお、上式の微分を実行すると、下式が得られる。

$$\begin{aligned}
h_f(t) &= \frac{f_3}{4 \pi \mu} \left\langle \frac{1}{R} \delta \left(t - \frac{R}{V_s} \right) \delta_{j3} \right. \\
&\quad + \frac{V_s^2}{R^3} \left[(R^2 \delta_{j3} - 3 x_j x_3) t \left(U \left(t - \frac{R}{V_s} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - U \left(t - \frac{R}{V_p} \right) \right) + \frac{R}{V_s} \left(R^2 \delta_{j3} \left(t - \frac{R}{V_s} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - x_j x_3 \left(3 t - \frac{R}{V_s} \right) \right) \delta \left(t - \frac{R}{V_s} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{R}{V_p} \left(R^2 \delta_{j3} \left(t - \frac{R}{V_p} \right) - x_j x_3 \left(3 t - \frac{R}{V_p} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \delta \left(t - \frac{R}{V_p} \right) - x_j x_3 \left[\left(\frac{R}{V_s} \right)^2 \left(t - \frac{R}{V_s} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \delta' \left(t - \frac{R}{V_s} \right) - \left(\frac{R}{V_p} \right)^2 \left(t - \frac{R}{V_p} \right) \delta' \left(t - \frac{R}{V_p} \right) \right] \right\} \dots (28)
\end{aligned}$$

移動加振解は、上式において、 R の代わりに、

$$\tilde{R} = \sqrt{(x_2 - V \tau)^2 + r^2} \dots (29)$$

を用い、時間変数 τ に関する以下の合成積を評価して、過去 (時間 τ) に作用した加振外力の影響を考慮することにより得られる。

$$u_j^{(m)} = \int_{-\infty}^t h_f(t - \tau) e^{i p \tau} d\tau \dots (30)$$

ここで、関数を引き数とするディラックのデルタ関数の性質⁷⁾を利用することにより、

$$\left. \begin{aligned} \delta \left(t - \tau - \frac{\tilde{R}}{V_s} \right) &= \frac{\tilde{R}_s}{R_s} \delta(\tau - t_s) \\ \delta \left(t - \tau - \frac{\tilde{R}}{V_p} \right) &= \frac{\tilde{R}_p}{R_p} \delta(\tau - t_p) \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

なる関係が得られる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} R_s &= \sqrt{(x_2 - V t)^2 + (1 - v^2) r^2} \\ R_p &= \sqrt{(x_2 - V t)^2 + (1 - v^2 \gamma^2) r^2} \\ t_s &= \frac{V_s t - v x_2 - R_s}{(1 - v^2) V_s}, \quad t_p = \frac{V_p t - v \gamma x_2 - R_p}{(1 - v^2 \gamma^2) V_p} \\ \tilde{R}_s &= \tilde{R} \Big|_{\tau=t_s} = \frac{v(x_2 - V t) + R_s}{(1 - v^2)} \\ \tilde{R}_p &= \tilde{R} \Big|_{\tau=t_p} = \frac{v \gamma (x_2 - V t) + R_p}{(1 - v^2 \gamma^2)} \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

である。ただし、上式においては、 $V < V_s$ を仮定している。また、 t_s および t_p は加振位置から受振位置までに要するS波およびP波の伝達時間に相当する。なお、 $V > V_s$ の場合には、(31)式は2つのデルタ関数の和で表され、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\delta \left(t - \tau - \frac{\tilde{R}}{V_s} \right) &= \frac{v(x_2 - V t) + R_s}{(1 - v^2) R_s} \\
&\quad \cdot \delta \left(\tau - \frac{V_s t - v x_2 - R_s}{(1 - v^2) V_s} \right) \\
&\quad + \frac{v(x_2 - V t) - R_s}{(1 - v^2) R_s} \\
&\quad \cdot \delta \left(\tau - \frac{V_s t - v x_2 + R_s}{(1 - v^2) V_s} \right) \dots (33)
\end{aligned}$$

これは、同時に2箇所から波動が到達することを意味する。ただし、波動が到達する範囲は、

$$V t - x_2 \geq \sqrt{v^2 - 1} r \geq 0$$

と与えられる。また、 $V = V_s$ の状態では、波動は衝撃波となる。以下では $V < V_s$ を仮定する (通常の地上走行車両はこの条件を満足する)。(31)および(32)式を用いることにより、

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tilde{R}} \delta \left(t - \tau - \frac{\tilde{R}}{V_s} \right) e^{i p \tau} d\tau &= \frac{e^{i p t_s}}{R_s} \\ \int_{-\infty}^t \frac{t - \tau}{\tilde{R}^n} U \left(t - \tau - \frac{\tilde{R}}{V_s} \right) e^{i p \tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{t_s} \frac{t - \tau}{\tilde{R}^n} e^{i p \tau} d\tau \\ \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tilde{R}^3} \left(t - \tau - \frac{\tilde{R}}{V_s} \right) \delta' \left(t - \tau - \frac{\tilde{R}}{V_s} \right) e^{i p \tau} d\tau &= -\frac{e^{i p t_s}}{\tilde{R}_s^2 R_s} \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

なる関係が得られる。(34)式を用いることにより、移動点加振解は、以下のように求められる。

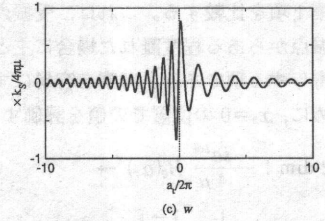
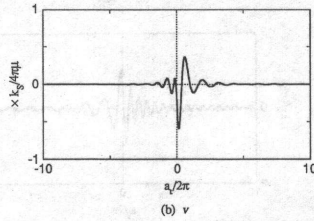
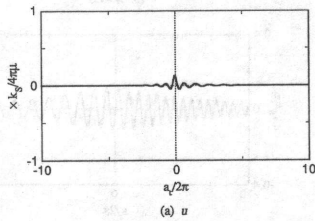
$$\begin{aligned}
u_1^{(m)} &= \frac{f_3 V_s^2}{4 \pi \mu} x_1 x_3 \left[3 \int_{t_s}^{t_p} \frac{t-\tau}{\tilde{R}^5} e^{i p \tau} d\tau \right. \\
&\quad + \frac{1}{V_s^2} \frac{e^{i p t_s}}{\tilde{R}_s^3 R_s} (\tilde{R}_s - 2 V_s (t - t_s)) \\
&\quad \left. - \frac{1}{V_p^2} \frac{e^{i p t_p}}{\tilde{R}_p^3 R_p} (\tilde{R}_p - 2 V_p (t - t_p)) \right] \\
u_2^{(m)} &= \frac{f_3 V_s^2}{4 \pi \mu} x_3 \left[3 \int_{t_s}^{t_p} \frac{(t-\tau)(x_2 - V \tau)}{\tilde{R}^5} e^{i p \tau} d\tau \right. \\
&\quad + \frac{1}{V_s^2} (x_2 - V t_s) \frac{e^{i p t_s}}{\tilde{R}_s^3 R_s} (\tilde{R}_s - 2 V_s (t - t_s)) \\
&\quad \left. - \frac{1}{V_p^2} (x_2 - V t_p) \frac{e^{i p t_p}}{\tilde{R}_p^3 R_p} (\tilde{R}_p - 2 V_p (t - t_p)) \right] \\
u_3^{(m)} &= \frac{f_3}{4 \pi \mu} \left[\frac{e^{i p t_s}}{R_s} + V_s^2 \int_{t_s}^{t_p} \left(\frac{3 x_3^2}{\tilde{R}^5} - \frac{1}{\tilde{R}^3} \right) (t-\tau) e^{i p \tau} d\tau \right. \\
&\quad + x_3^2 \frac{e^{i p t_s}}{\tilde{R}_s^3 R_s} (\tilde{R}_s - 2 V_s (t - t_s)) \\
&\quad \left. - \frac{V_s^2 x_3^2}{V_p^2} \frac{e^{i p t_p}}{\tilde{R}_p^3 R_p} (\tilde{R}_p - 2 V_p (t - t_p)) \right] \quad \dots\dots\dots (35)
\end{aligned}$$

上式は(23)式に対応する解であり、定積分が含まれているものの無限積分は避けられている。結果として、3次元点加振解のインパルス応答の合成積を評価することによりかなり見通しのよい解を得ることができた。なお、(35)式第3式の第1項は、(25)式と一致している。

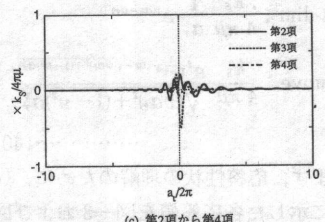
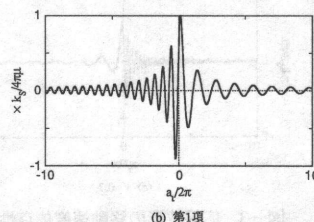
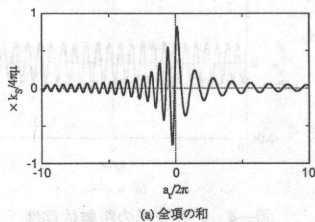
5. 無次元量の導入

解の性状の考察を容易にするために以下の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned}
a_x &= a_{x_1} = \frac{p}{V_s} x_1, & a_y &= a_{x_2} = \frac{p}{V_s} x_2 \\
a_z &= a_{x_3} = \frac{p}{V_s} x_3, & a_R &= \frac{p}{V_s} R
\end{aligned}$$



図—1 移動点加振解の時刻歴



図—2 加振方向変位の各項の寄与

$$\begin{aligned}
a_{\tilde{R}} &= \frac{p}{V_s} \tilde{R}, & a_r &= \frac{p}{V_s} r \\
a_{R_s} &= \frac{p}{V_s} R_s, & a_{\tilde{R}_s} &= \frac{p}{V_s} \tilde{R}_s \\
a_{R_p} &= \frac{p}{V_s} R_p, & a_{\tilde{R}_p} &= \frac{p}{V_s} \tilde{R}_p \\
a_{t_s} &= p t_s, & a_{t_p} &= p t_p, & a_t &= p t
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

これらを用いると、2次元解は、

$$\begin{aligned}
u_j^{(2)} &= \frac{i f_3 e^{i a_t}}{4 \mu} \left[-H_0(a_r) \delta_{j3} \right. \\
&\quad + \frac{2 a_{x_j} a_{x_3} - a_r^2 \delta_{j3}}{a_r^3} \{ \gamma H_1^{(2)}(\gamma a_r) - H_1^{(2)}(a_r) \} \\
&\quad \left. - \frac{a_{x_j} a_{x_3}}{a_r^2} \{ \gamma^2 H_0^{(2)}(\gamma a_r) - H_0^{(2)}(a_r) \} \right] \quad \dots\dots\dots (37)
\end{aligned}$$

と、3次元解は、

$$\begin{aligned}
u_j^{(3)} &= \frac{k_s f_3 e^{i a_t}}{4 \pi \mu} \left\langle \frac{1}{a_R} e^{-i a_R} \delta_{j3} + \frac{1}{a_R^3} \left[-(1 + i a_R) \delta_{j3} \right. \right. \\
&\quad + \frac{a_{x_j} a_{x_3}}{a_R^2} \{ 3 + 3 i a_R - a_R^2 \} e^{-i a_R} \\
&\quad \left. - \frac{1}{a_R^3} \left[-(1 + i \gamma a_R) \delta_{j3} + \frac{a_{x_j} a_{x_3}}{a_R^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \{ 3 + 3 i \gamma a_R - \gamma^2 a_R^2 \} e^{-i \gamma a_R} \right] \right\rangle \quad \dots\dots\dots (38)
\end{aligned}$$

と、移動点加振解は、

$$\begin{aligned}
u_1^{(m)} &= \frac{f_3 k_s}{4 \pi \mu} a_x a_z \left[3 \int_{a_{t_s}}^{a_{t_p}} \frac{a_t - a_\tau}{a_R^5} e^{i a_\tau} d a_\tau \right. \\
&\quad + \frac{e^{i a_{t_s}}}{a_{R_s}^3 a_{R_s}} (a_{\tilde{R}_s} - 2 (a_t - a_{t_s})) \\
&\quad \left. - \gamma \frac{e^{i a_{t_p}}}{a_{R_p}^3 a_{R_p}} (\gamma a_{\tilde{R}_p} - 2 (a_t - a_{t_p})) \right] \\
u_2^{(m)} &= \frac{f_3 k_s}{4 \pi \mu} a_z \left[3 \int_{a_{t_s}}^{a_{t_p}} \frac{(a_t - a_\tau)(a_y - v a_\tau)}{a_R^5} e^{i a_\tau} d a_\tau \right. \\
&\quad + (a_y - v a_{t_s}) \frac{e^{i a_{t_s}}}{a_{R_s}^3 a_{R_s}} (a_{\tilde{R}_s} - 2 (a_t - a_{t_s})) \\
&\quad \left. + (a_y - v a_{t_p}) \frac{e^{i a_{t_p}}}{a_{R_p}^3 a_{R_p}} (\gamma a_{\tilde{R}_p} - 2 (a_t - a_{t_p})) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma(a_y - va_{tr}) \frac{e^{ia_{tr}}}{a_{tr}^3 a_{Rp}} (\gamma a_{Rp} - 2(a_t - a_{tr})) \Big] \\
u_3^{(m)} = & \frac{f_3 k_s}{4 \pi \mu} \left[\frac{e^{ia_s}}{a_{Rs}} + \int_{a_s}^{a_{tr}} \left(\frac{3a_z^2}{a_R^5} - \frac{1}{a_R^3} \right) (a_t - a_r) e^{ia_r} da_r \right. \\
& + a_z^2 \frac{e^{ia_s}}{a_{Rs}^3 a_{Rs}} (a_{Rs} - 2(a_t - a_{ts})) \\
& \left. - \gamma a_z^2 \frac{e^{ia_{tr}}}{a_{tr}^3 a_{Rp}} (\gamma a_{Rp} - 2(a_t - a_{tr})) \right] \quad \dots\dots\dots (39)
\end{aligned}$$

と示される。(39)式において $v=0.0$ を代入すると、定積分ははずれ、(38)式の3次元点加振解に一致することが確認できる。

このようにして得られた移動点加振解を図-1に示す。ただし、ポアソン比 $\nu=0.4$ 、移動速度 $v=0.4$ 、無次元距離 $a_x=a_z=\sqrt{0.5}$ 、 $a_y=0.0$ を採用した。図に示されるように、加振方向変位 w は他に比べて継続時間が長く応答レベルも高い。これは、(39)式第3式の第1項の寄与のためと想像される。このことを検討するために、(39)式第3式の加振方向変位 w を項別に評価した結果を図-2に示す。図より、第2項以下の各項は第1項に比較して継続時間が短くかつ応答振幅が小さい。したがって、第1項が加振方向変位の主要項であると判断できる。加振方向に直交する変位成分には、第1項に相当する項が存在しないために、上述の傾向が現れたものと推察される。

6. 加振源の移動効果に関する考察

2次元、3次元加振解および移動加振解の加振方向変位の第1項の比較を行ってみる。すなわち(37)~(39)式第3式の第1項を比較する。これは、受振点が加振点からある程度離れた場合に主として寄与する項である。考察を容易にするために、 $x_2=0$ の位置での値を評価する。

$$\begin{aligned}
2\text{-dim} : & -\frac{ie^{ia}}{4\mu} H_0(a_r) \xrightarrow{a_r \rightarrow \infty} \\
& \frac{1}{4\mu\sqrt{\pi}} \frac{1-i}{\sqrt{a_r}} e^{i(a_r - a_r)} \\
3\text{-dim} : & \frac{k_s}{4\pi\mu} \frac{1}{a_r} e^{i(a_r - a_r)} \\
\text{move} : & \frac{k_s}{4\pi\mu} \frac{e^{i\frac{1}{1-v^2}(a_r - \sqrt{(va_t)^2 + (1-v^2)a_r^2})}}{\sqrt{(va_t)^2 + (1-v^2)a_r^2}} \quad \dots\dots\dots (40)
\end{aligned}$$

まず、応答性状の理解のために、(40)式に示した各応答値を図-3および図-4に示す。図-3に示されるように、移

動点加振解は定常加振力に対しても応答波形の振動数および振幅が時間と共に変動している。この変動の仕方は移動速度比 v の増加とともに顕著となっている。すなわち、速度の増大とともに、波形の包絡形の変化が著しくなって時刻0で急激に応答変位が増大し、負の時間での振動数が増加している。一方、図-4からは、無次元距離の増加とともに正弦波形に近づいていくことが理解できる。

2次元および3次元点加振解は振動数 p で定常振動する。これに対して移動点加振解は非定常応答となる。そこで、移動点加振解の振動数(周期)特性について検討する。3次元点加振解と移動点加振解の指数部の比を求めると、

$$g(a_t, a_r) = \frac{a_t - \sqrt{(va_t)^2 + (1-v^2)a_r^2}}{(1-v^2)(a_t - a_r)} \quad \dots\dots\dots (41)$$

となる。上式で、 $a_r=0$ とおくと、振動数比として、

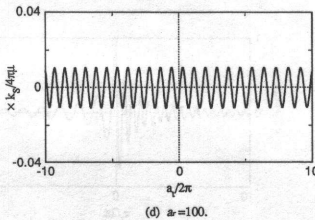
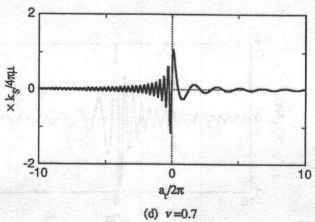
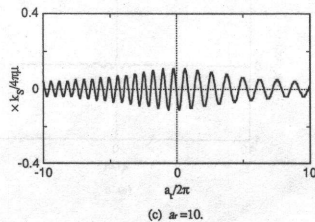
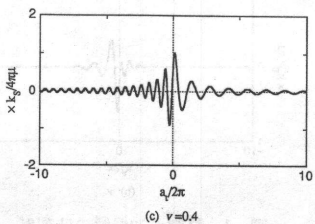
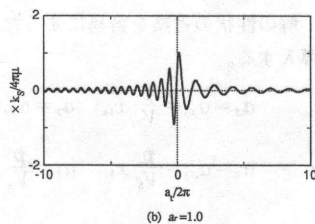
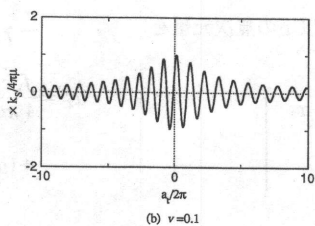
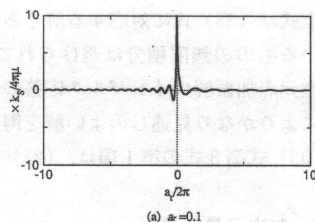
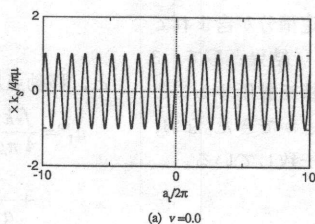


図-3 応答波形の移動速度依存性 ($a_r=1.0$)

図-4 応答波形の距離依存性 ($\nu=0.4$)

$$g(a_t, a_r=0) = \frac{1 - v \operatorname{sgn} a_t}{1 - v^2} = \begin{cases} \frac{1}{1-v} & a_t < 0 \\ \frac{1}{1+v} & a_t > 0 \end{cases} \quad (42)$$

が得られる。このように、加振源の移動軸上では、負の時間、すなわち、加振源が近づいてくるときには高振動数で、正の時間では低振動数で振動し、加振振動数に対する振動数比は速度比 v のみで与えられることが分かる。これは、荷重の移動効果による周知のドップラー効果を表している。一方、加振源の移動軸から離れた位置では、(41) 式で与えられ、

$$\left. \begin{aligned} g(a_t \rightarrow -\infty, a_r) &= \frac{1}{1-v} \\ g(a_t \rightarrow \pm 0, a_r) &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ g(a_t \rightarrow +\infty, a_r) &= \frac{1}{1+v} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

から理解できるように、時間の経過とともに振動数が連続的に減少する。 $v=0.4$ の場合について、加振源の移動軸からの無次元距離をパラメータとした振動数の経時変化を図-5 に示す。図に示されるように、時間とともに振動数が減少するが、無次元距離が大きいと振動数の変化の仕方がゆるやかになることが分かる。したがって、加振軸から離れた位置では加振振動数近傍の正弦波形的な応答となる。

移動加振解に含まれる振動数成分については、移動加振解の積分表示式である (23) 式第 3 式の第 1 項から、

$$\frac{e^{i\alpha x_2/v}}{4 i\mu V} H_0^{(2)} \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 - \left(\frac{\omega-p}{V}\right)^2} \right) e^{-i\omega x_2/v}$$

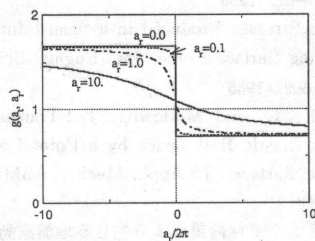


図-5 振動数の経時変化の距離依存性 ($v=0.4$)

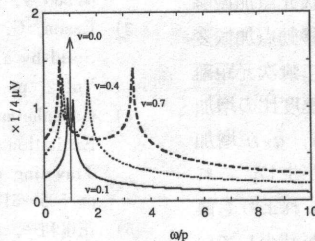


図-6 フーリエ振幅の移動速度依存性 ($a_r=1.0$)

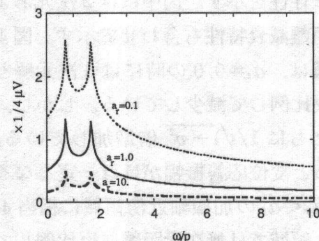


図-7 フーリエ振幅の距離依存性 ($v=0.4$)

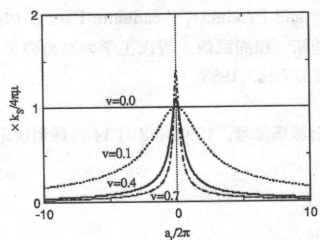


図-8 包絡波形の移動速度依存性 ($a_r=1.0$)

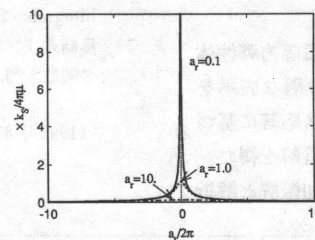


図-9 包絡波形の距離依存性 ($v=0.4$)

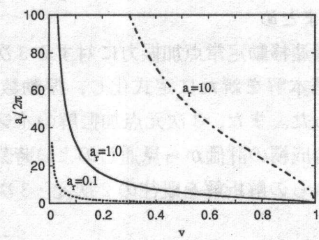


図-10 継続時間の移動速度・距離依存性

$$= \frac{pe^{i\alpha x_2/v}}{4 i\mu V} H_0^{(2)} \left(a_r \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{v^2} (\tilde{\omega}-1)^2} \right) e^{-i\tilde{\omega} a_{x_2}/v}$$

$$\text{ここに } \tilde{\omega} = \frac{\omega}{p} \quad (44)$$

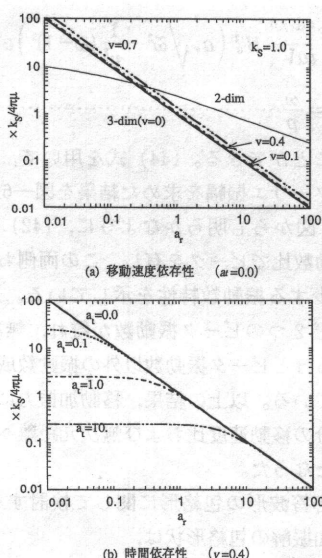
と求めることができる。(44) 式を用いて、移動加振解主要項のフーリエ振幅を求めた結果を図-6 および図-7 に示す。図からも明らかなように、(42) 式に示した 2 つの振動数比でピークを有し、この両側および内側で振幅が減少する振動数特性を示している。速度比 v が大きいほど 2 つのピーク振動数が離れ、無次元距離 a_r が増大するほどピーク振動数以外の振動数成分が相対的に増加している。以上の結果、移動加振力に対する応答の移動成分の移動速度比および無次元距離への依存の仕方が明確となった。

次に、応答波形の包絡形に関して検討する。(40) 式より移動加振解の包絡形状は、

$$\frac{k_s}{4 \pi \mu} \frac{1}{\sqrt{(v a_t)^2 + (1-v^2) a_r^2}} \quad (45)$$

の無次元時間の変化に対する応答値で与えられる。上式より、包絡波形は移動速度比および無次元距離に依存し、時間に対して対称となることが分かる。また、包絡形の最大値は時刻 0 の時に生じる。図-8 および図-9 に包絡波形の移動速度比および無次元距離依存性を示す。速度の増加と無次元距離の減少により包絡波形が鋭いピークを持つようになる。今、波形の継続時間の 1 つの尺度として、包絡形の最大値の $1/\alpha$ 以上の振幅となる時間帯を採用すると、

$$\alpha_t^{\text{duration}} = \frac{2 a_r}{v} \sqrt{a^2 - 1} \sqrt{1 - v^2} \quad (46)$$



図—11 移動加振解の距離減衰特性

と継続時間が得られる。上式の意味での継続時間は、無次元距離に比例して増加し、移動速度比の増加とともに減少する。図—10に $\alpha=10$ とした場合の継続時間の移動速度比と無次元距離への依存の仕方を示す。図から、移動速度が0の場合には無限時間となって定常正弦振動を示し、移動速度がせん断速度に一致すると継続時間が0となって衝撃波となることが分かる。

最後に、移動加振変位解の距離減衰特性を考察する。距離減衰は、(45)式の無次元距離に対する変化度合いから得られる。これは、移動速度比と無次元距離に依存する。図—11に距離減衰の移動速度比および無次元時間依存性を示す。図中には2次元および3次元点加振解の距離減衰特性も合わせて示す。図より、移動点加振変位解は、 $a_t=0.0$ の時には3次元解と同様に無次元距離に反比例して減少している。しかし、移動速度比の増加とともに $1/\sqrt{1-v^2}$ 倍増加している。一方、 a_t が増加すると変位応答振幅がほぼ一定となる領域が生じ、これは $a_t < a_t$ の加振軸近傍領域に相当する。これよりも離れた領域では無次元距離に反比例して振幅が減少している。これは、前述の継続時間の特徴を裏付けている。

7. まとめ

等速移動定常点加振力に対する3次元均質等方弾性体の基本解を新たに定式化し、振動数成分の陽な表示を行った。また、3次元点加振解のインパルス応答に基づく合成積の評価から見通しのよい時刻歴応答解を得た。これらの解析解を既往の2次元・3次元点加振解と解析

表現ならびに数値結果を通して比較考察し、加振力の移動効果を明確にした。その結果、以下の知見が得られた。

- (1) 移動加振解は非定常応答となり、加振方向変位が他の方向変位に比べて継続時間・振幅ともに大きくなる。これは加振方向変位のみに含まれる主要項の存在による。
- (2) 加振方向変位の主要項による考察から、加振力が近づくときには高振動数成分が、離れるときには低振動数成分が励起されるといういわゆるドップラー効果が現れ、移動速度が大きいかほど両振動数の間隔が広がり、無次元距離が小さいほど振動数の時間変化が大きくなる。
- (3) 応答波形の包絡形状は、移動速度が大きく無次元距離が小さいほど、最大振幅が増加し、継続時間が短くなる。
- (4) 距離減衰は3次元解と同様に距離に反比例するが、時間の経過とともに加振軸近傍での応答振幅一定領域が増加する。

本論では、3次元弾性体における加振源の移動効果の本質的理解をするために、実体波のみが存在する全無限一様地盤を対象とした。今後は、地表面に自由境界がある場合、さらには、地盤が成層構造となる場合についての検討を加え、表面波も含めた考察を行う予定である。

参考文献

- 1) 松岡 理, 八幡夏恵子: 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 Mindlin 問題 その1, 日本建築学会論文報告集, 第288号, pp. 73~84, 1980
- 2) 中井正一, 福和伸夫: 埋込み剛基礎の動特性に基づく動的擬似3次元効果の考察 境界要素法による動的擬似3次元効果に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 第380号, pp. 57~67, 1986
- 3) Eason, G.: The Stresses Produced in a Semi-Infinite Solid by a Moving Surface Force, Int. Engng. Sci., Vol. 2, pp. 581~609, 1965
- 4) Gakenheimer, D., C. and Miklowitz, J.: Transient Excitation of an Elastic Half Space by a Point Load Traveling on the Surface, J. Appl. Mech., ASME, pp. 505~515, 1969
- 5) 花里利一, 鶴飼恵三: 走行荷重により生じる地盤振動のFEM解析, 土質工学会論文報告集, Vol. 23, No. 1, pp. 144~150, 1983
- 6) Geronimus, Yu., V. and Tseytlin, M., Yu.: Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, 1963
- 7) 篠崎寿夫, 松森徳衛, 松浦武信: 現代工学のためのデルタ関数入門, 現代工学社, 1983

(1992年4月3日原稿受理, 1992年8月14日採用決定)