

離散解析モデルにおける波動の分散性と最適整合質量比の提示 A STUDY ON THE WAVE DISPERSION IN THE DISCRETE ANALYSIS MODEL AND A PROPOSAL OF OPTIMAL CONSISTENT MASS RATIO

福和伸夫*, 勝倉 裕**, 中井正一***

Nobuo FUKUWA, Hiroshi KATUKURA and Shoichi NAKAI

The wave propagation in the analysis of the discrete method such as finite element method is examined for one dimensional structure. The transfer matrix method is adopted and the phase velocity, group velocity and equivalent damping ratio are explicitly solved from the eigenvalue of transfer matrix. From this examination, it is clarified that the propagating waves show the dispersion even if the continuum body is analyzed. In order to improve the wave propagation property, the optimal consistent mass ratios are derived, which give the same phase velocity or group velocity as those of the rigorous solution.

Keywords : wave dispersion, one dimensional structure, discrete analysis method, mass modeling, transfer matrix method

波動の分散性, 1次元構造物, 離散解析法, 質量行列作成法, 伝達行列法

1. はじめに

前報¹⁾では, 波動解と伝達行列法を用いて, 1次元連続体と集中質点で構成される1次元周期構造物の波動伝播性状を検討した。その結果, 集中質点の存在により, 構造物内を伝播する波動の位相速度・群速度に分散性が生じ, 付加質点の大きさおよび振動数によって, 波動の速度が変動することが明らかになった。この波動の分散現象は, 連続体の質量をゼロとしたばねとマスのみで構成される構造物の場合にも認められた。これは, 離散モデルにおける数値分散性としてとらえることができる。

そこで, 本論では, 有限要素法などの離散解析モデルにおける波動の分散性について, 伝達行列法を用いて検討する。解析対象としては, 集中質点と1次元連続体で構成される単純な構造物を採用する。これは, 上部構造についていえば, 床を集中質点に, 耐震部材を連続体に置換したモデルに相当する。また, 集中質点を考慮しない場合には, 地盤の1次元波動解析モデルを考えたことにも相当する。

連続体部分を剛性行列と質量行列を用いて離散化し, 質量行列のモデル化として, 整合質量モデル, 集中質量モデル, および整合質量比による両者の線形結合モデル,

を想定する。最後の線形結合モデルは, 動的問題における精度向上のために用いられることが多く, 汎用構造解析プログラム NASTRAN²⁾ などでは整合質量比として1/2の採用を推奨している。離散化により得られた振動モデルから, 隣り合う両節点の状態量を関係付ける伝達行列を求める。伝達行列は, 構造物内の波動の伝播・増幅を表す。したがって, 伝達行列の固有値の位相情報から, 構造物内を伝播する波動の位相速度, 群速度を求めることができる。また, 固有値の振幅情報からは構造物内で生じる減衰効果を求めることができる。得られた離散モデルの位相速度・群速度を, 前報¹⁾で得られた集中質点一連続体モデルの結果と比較することにより, 離散化が波動伝播性状にどのような影響を与えるかを明確にする。

この検討の結果, 質量行列のモデル化が波動の伝播性状に大きな影響を与えることが明らかとなった。すなわち, 波動が伝播できる振動数範囲および波動の速度が, 質量行列作成時の整合質量比に依存する。そこで, 構造物内を伝播する波動の伝播速度が, 離散モデルと連続体モデルで一致するように, 最適な整合質量比を定める。これを最適整合質量比と称して, その有効性を構造物の

本論文の一部は参考文献9)に発表したものである。

* 名古屋大学工学部建築学科 助教授・工博

** 清水建設大崎研究室 主任研究員・工博

*** 清水建設大崎研究室 グループ長・工博

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Nagoya Univ., Dr. Eng.

Senior Research Engineering, Ohsaki Research Institute, Shimizu Corporation, Dr. Eng.

Ohsaki Research Institute, Shimizu Corporation, Dr. Eng.

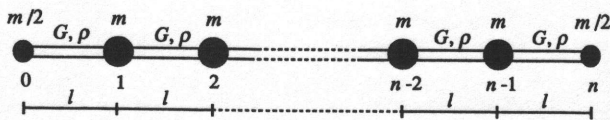
周波数応答関数を用いて示す。得られた最適整合質量比は振動数と集中質点の大きさに依存した値として求められる。

離散モデルにおける数値分散性の検討は、差分法を多用する空気流体力学の分野では従来よりなされてきた³⁾。しかし、有限要素法を主に用いる構造解析分野での検討は非常に少ない。近年、地盤の波動伝播解析において、表面波の存在による波動の分散性の検討を離散モデルにより行う例が増えてきている⁴⁾。こういった離散モデルによる波動の分散性の検討においては、離散化に伴う波動の分散性が内在していることを念頭においていないと、本来着目すべき表面波の分散現象を誤って解釈することになる。

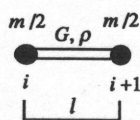
一方、質量行列の取り扱いについては、従来より種々の検討が行われてきており⁵⁾、質量行列の対角化の方法、集中質量行列と整合質量行列の平均値を用いる方法の有効性の検討^{6),7)}などがなされてきた。これは、動的問題において、解の精度に質量行列のモデル化が大きな影響を及ぼすことが認識されてきたためと考えられる。近年、波動解を内挿関数として用いた非対称な質量行列の作成法⁸⁾なども提案されている。こういった既往の検討例のほとんどは、変位解や固有値の精度という観点で動的問題の誤差が議論されている。しかし、本来、構造物の動的現象は、波動が構造物内を伝播することによって生じる。したがって、離散化に伴う数値誤差に関する議論を行う場合には、離散解析モデルにおける波動の伝播性状が連続体のそれをどのように模擬しているかという観点での議論が重要であると考えられる。そこで、本論では、波動の伝播速度に着目して、質量行列の作成法の検討を行う。

2. 伝達行列の固有値

図-1に示すように、 $n+1$ 個の集中質点が等間隔で存在する1次元連続体を対象とする。各質点の質量を m 、質点間隔を l 、連続体の弾性定数、断面積、質量密度を各々 G 、 A 、 ρ とする。この時、構造物は同一の構造要素が繰り返し現れる1次元周期構造物となり、その



(a) 1次元連続体-集中質点で構成される周期構造物



(b) 周期構造物の基本構造要素

図-1 解析概念図

基本構造要素は両端に質量 $m/2$ の質点が存在する長さ l の1次元連続体 (図-1 b) となる。連続体部分に変分原理を適用して、線形要素を用いた有限要素法による定式化を行うと、連続体は以下の剛性行列 K と質量行列 M_c でモデル化される。

$$K = \frac{GA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_c = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、質量行列の下添字 C は整合質量行列 (Consistent Mass) であることを示す。有限要素法による動的解析においては、整合質量行列 M_c と、これを対角化した集中質量行列 M_L の線形結合により質量行列をモデル化することが、しばしば行われる。本論でも、質量行列を整合質量比 θ を用いて、

$$M = \theta M_c + (1 - \theta) M_L \\ = \theta \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (1 - \theta) \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表すことにする。ここで、定常振動問題を対象とすることになると、基本構造要素の動的剛性行列 $\bar{S}$ は集中質点の寄与を加えることにより、下式で与えられる。

$$\bar{S} = \frac{GA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ - \omega^2 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \theta \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + (1 - \theta) \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

なお、 $\bar{S}$ は前報¹⁾と対応させるために離散モデルに対する量を表すものとする。(3)式を整理するために、以下の諸量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} k_b &= \frac{GA}{l} & m_b &= \rho Al \\ \alpha &= \frac{m}{m_b} & \beta &= \frac{\omega}{\omega_b} = \frac{\omega l}{V} \\ \omega_b &= \sqrt{\frac{k_b}{m_b}} & V &= \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \omega_b l \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに k_b は連続体の静的剛性、 m_b は連続体の質量、 α は集中質点と連続体の質量比、 V は離散モデルにおける連続体部の等価速度、 ω_b は固有振動数、 β は無次元振動数である。なお、 $\theta=0$ は集中質量モデルに、 $\theta=1$ は整合質量モデルに、また $\alpha=0$ は等質連続体の離散モデルに対応する。さらに、 $\beta=1$ は要素長さが波長の $1/2\pi$ となる振動数に相当する。(4)式の諸量を用いることにより、(3)式で与えられる動的剛性行列は、

$$\bar{S} = k_b \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta^2}{2} \left\{ (1 + \alpha) - \frac{\theta}{3} \right\} & -1 - \frac{\theta}{6} \beta^2 \\ -1 - \frac{\theta}{6} \beta^2 & 1 - \frac{\beta^2}{2} \left\{ (1 + \alpha) - \frac{\theta}{3} \right\} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

と整理される。質点位置 i と $i+1$ の状態ベクトル間の

関係は、(5)式の動的剛性行列から得られる伝達行列、

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \begin{bmatrix} -\bar{S}_{12}^{-1}\bar{S}_{11} & \bar{S}_{12}^{-1} \\ -\bar{S}_{21} + \bar{S}_{22}\bar{S}_{12}^{-1}\bar{S}_{11} & -\bar{S}_{22}\bar{S}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} & \frac{1}{k_b} \frac{6}{6+\beta^2\theta} \\ \frac{(1+\alpha)\beta^2 k_b}{6+\beta^2\theta} \left\langle 6 \frac{\beta^2}{2} [3(1+\alpha)-2\theta] \right\rangle & \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

を用いて以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ f_{i+1} \end{bmatrix} = \bar{T} \begin{bmatrix} u_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここに、 u_i および f_i は質点 i の変位および節点力を示す。上式で明らかなように、伝達行列は隣り合う節点間での状態量の増幅・伝達特性を表す。構造物内の波動の伝播性状を検討するために、伝達行列の固有値問題、

$$\bar{T} \bar{\Phi} = \bar{\Phi} \bar{\Lambda} \quad (8)$$

を考える。ここに、 $\bar{\Lambda}$ は固有値 $\bar{\lambda}_i$ ($i=1, 2$) を対角に含む行列、 $\bar{\Phi}$ は固有ベクトルを各列に含む固有行列である。固有値 $\bar{\lambda}_i$ と固有ベクトル $\bar{\Phi}_i$ ($i=1, 2$) は、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i &= \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} \pm i \sqrt{1 - \left\langle \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} \right\rangle^2} \\ \bar{\Phi}_i &= \begin{bmatrix} -1 \\ \pm i k_b \frac{6+\beta^2\theta}{6} \sqrt{1 - \left\langle \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} \right\rangle^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

前報¹⁾で述べたように、固有値は、 $\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = 1$ を満足し、 $\bar{\lambda}_1$ を $|\bar{\lambda}_1| \leq 1$ となるように採用すると、 $\bar{\lambda}_1$ は進行波に、 $\bar{\lambda}_2$ は逆行波に対応する。

参考のために、対応する連続体モデルの動的剛性行列、伝達行列、固有値を以下に示す¹⁾。

$$\begin{aligned} S &= k_b \frac{\beta}{\sin \beta} \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta & -1 \\ -1 & -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta & \frac{1}{k_b} \frac{\sin \beta}{\beta} \\ k_b \left\{ 1 - \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2 \right\} & -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right) \\ &\pm i \sqrt{1 - \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

3. 位相・群速度と等価減衰

基本構造要素内を伝播する波動の位相速度、群速度、等価減衰定数は、(9)式に示した伝達行列の固有値から求めることができる。まず、位相速度は、固有値の位相角から下式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{V}_{Phase} &= \frac{\omega l}{\arg(\bar{\lambda}_1)} = V \frac{\beta}{\arg(\bar{\lambda}_1)} \\ &= \frac{\beta V}{\cos^{-1} \left\langle \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} \right\rangle} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに、(11)式の位相速度が存在する条件は下式で与えられる。

$$\beta \leq 2 \sqrt{\frac{3}{3(1+\alpha)-2\theta}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

すなわち、(12)式を満足する振動数範囲でのみ波動が伝播することを意味し、(12)式は本問題における透過振動数域に対応する。一方、群速度は、

$$\begin{aligned} \bar{V}_{Group} &= \frac{\partial \omega}{\partial \arg(\bar{\lambda}_1)} l = V \frac{\partial \beta}{\partial \arg(\bar{\lambda}_1)} \\ &= \frac{V(6+\beta^2\theta)^2}{36(1+\alpha)\beta} \sqrt{1 - \left\langle \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} \right\rangle^2} \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となる。群速度の存在条件も(12)式で与えられる。(11)~(13)式から、波動は(12)式を満足する透過振動数域のみで伝播し、その位相速度および群速度は無次元振動数 β 、質量比 α 、および整合質量比 θ に依存した分散性を示すことが分かる。

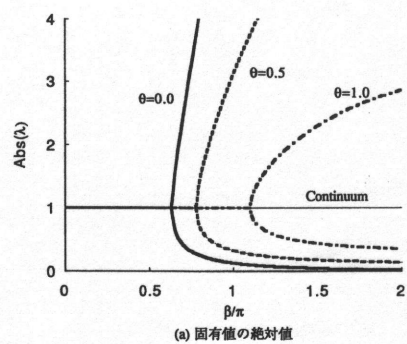
次に、波動の減衰の大きさを検討する。等価減衰定数は、

$$\bar{h}_e = \frac{1}{\beta} \log |\bar{\lambda}_1| = \frac{1}{\beta} \cosh^{-1} \left| \frac{6-\beta^2[3(1+\alpha)-\theta]}{6+\beta^2\theta} \right| \quad \dots\dots\dots (14)$$

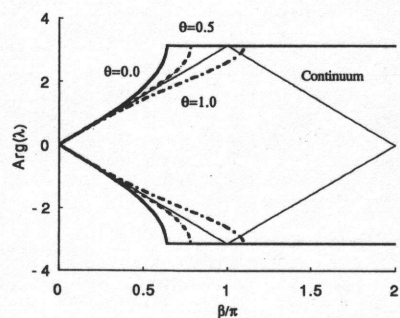
と求めることができ、(12)式を満足しない遮断振動数域でのみ存在する。すなわち、(12)式を満足しない高振動数域では波動は伝播せず、減衰効果のみが生じることになる。

対応する連続体モデルの位相速度、群速度および等価減衰定数は、以下のとおりである¹⁾。

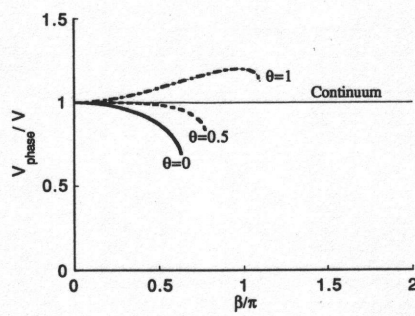
$$\begin{aligned} V_{Phase} &= V \frac{\beta}{\cos^{-1} \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)} \\ V_{Group} &= V \left| \frac{\sqrt{4 - \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2}}{(\alpha+2) \sin \beta + \alpha\beta \cos \beta} \right| \\ h_e &= \frac{1}{\beta} \cosh^{-1} \left| -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right| \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$



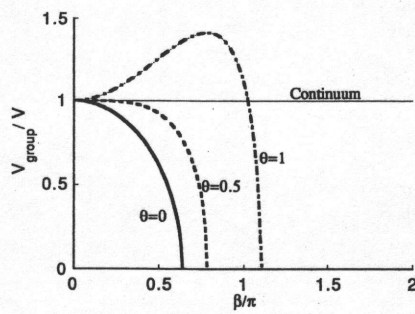
(a) 固有値の絶対値



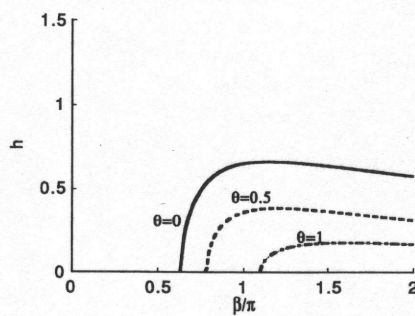
(b) 固有値の位相角



(c) 位相速度

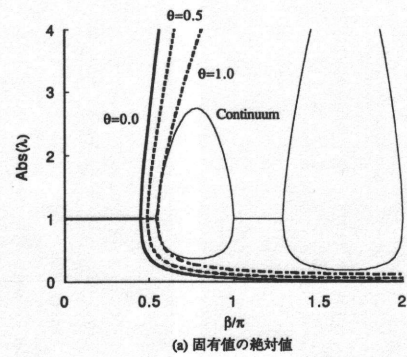


(d) 群速度

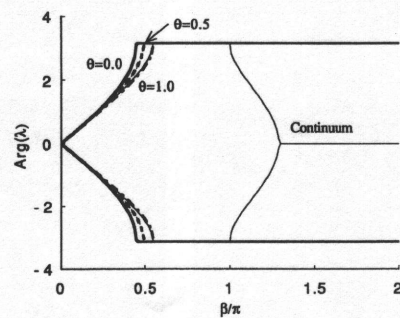


(e) 等価減衰

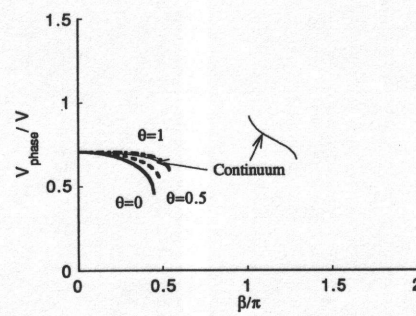
図—2 伝達行列の固有値・位相・位相速度・群速度、等価減衰 ($\alpha=0.0$)



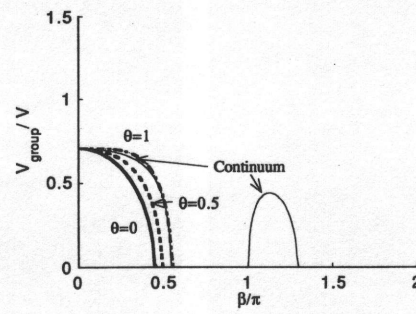
(a) 固有値の絶対値



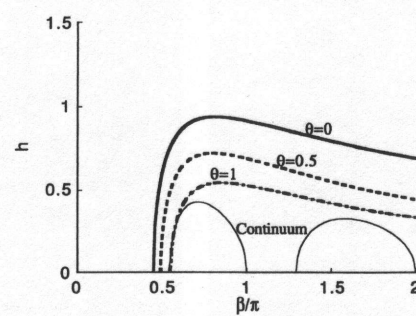
(b) 固有値の位相角



(c) 位相速度

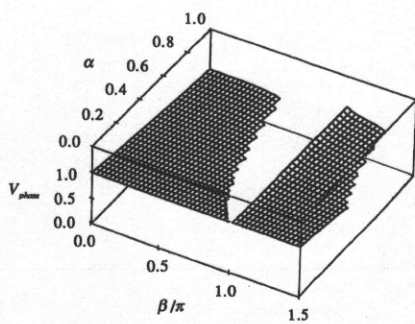


(d) 群速度

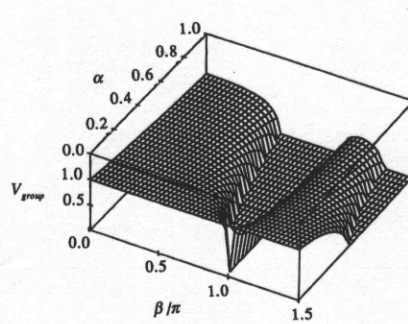


(e) 等価減衰

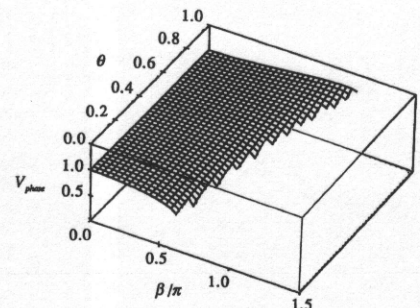
図—3 伝達行列の固有値・位相・位相速度・群速度、等価減衰 ($\alpha=1.0$)



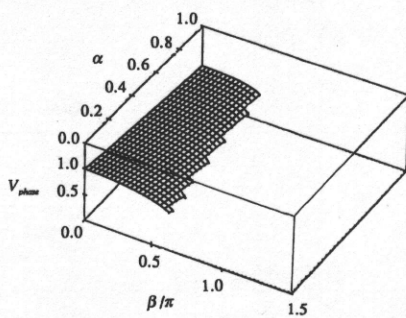
(a-1) 位相速度 (連続体モデル)



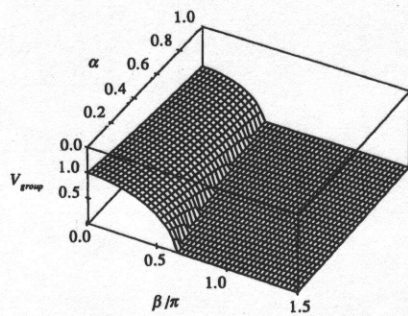
(b-1) 群速度 (連続体モデル)



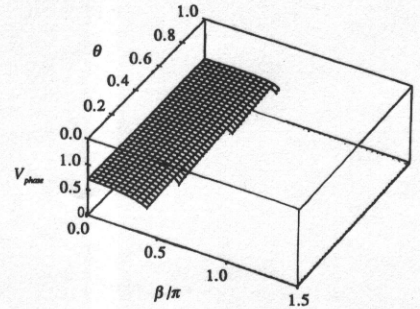
(a-1) 位相速度 ($\alpha = 0.0$)



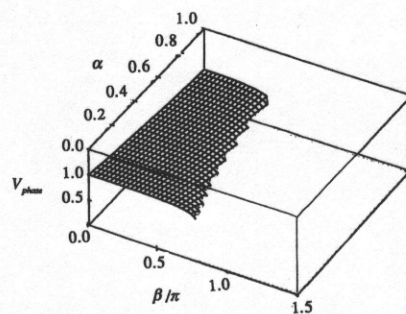
(a-2) 位相速度 (離散モデル; $\theta = 0.0$)



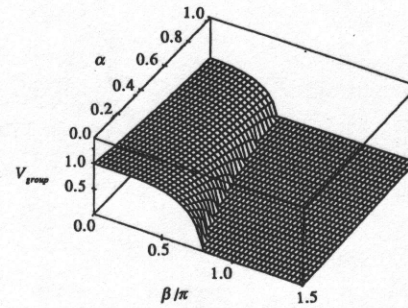
(b-2) 群速度 (離散モデル; $\theta = 0.0$)



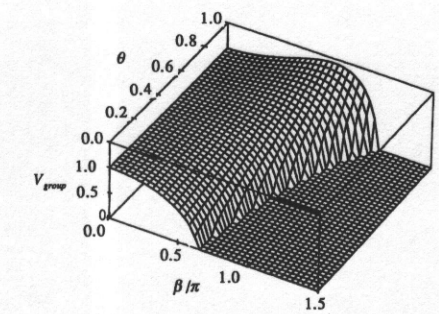
(a-2) 位相速度 ($\alpha = 1.0$)



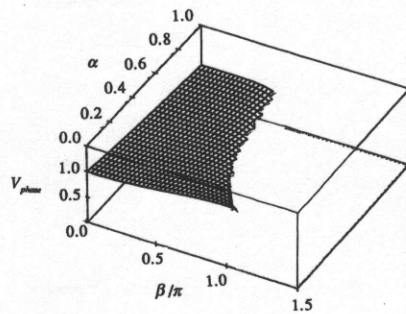
(a-3) 位相速度 (離散モデル; $\theta = 0.5$)



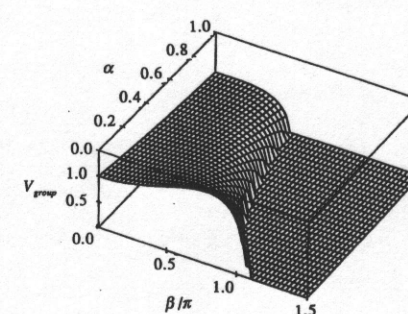
(b-3) 群速度 (離散モデル; $\theta = 0.5$)



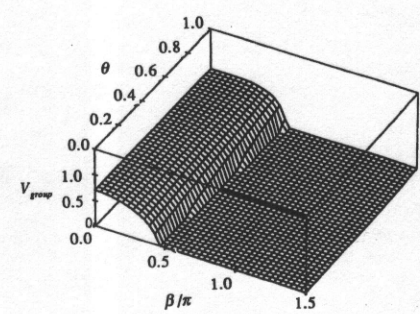
(b-1) 群速度 ($\alpha = 0.0$)



(a-4) 位相速度 (離散モデル; $\theta = 1.0$)



(b-4) 群速度 (離散モデル; $\theta = 1.0$)



(b-2) 群速度 ($\alpha = 1.0$)

図—4 連続体モデルと離散モデルの
位相速度・群速度

図—5 離散モデルの位相速度・群速
度の整合質量比依存性

図-2, 3に, (9)~(14)式に示した離散解析モデルにおける固有値の絶対値, 位相角, 位相速度, 群速度および等価減衰定数を, 連続体モデルの結果(10)式, (15)式と比較して示す。また, 波動の伝播性状に及ぼす付加集中質点と質量行列の作成法の影響をよりよく理解するために, 図-4および図-5に位相速度と群速度の付加質点質量比($\alpha \sim \beta$)依存性と整合質量比($\theta \sim \beta$)依存性を示す。

図-2は付加集中質点の存在しない場合($\alpha=0$)を示しているが, 本来, 分散性が存在しない等質連続体の場合にも, 離散化モデルに分散性が生じており, 波動の伝播できる振動数が限定されている。この透過振動数域は(12)式で示されるように整合質量比 θ が大きいほど広がる。ちなみに, 集中質量モデルである $\theta=0$ の場合には $\beta \leq 2$, 整合質量モデルの場合($\theta=1$)には $\beta \leq 2\sqrt{3}$ となる。また, 波動伝播速度については, 集中質量モデルでは遅めに, 整合質量モデルでは早めに評価されており, 両者の平均値($\theta=1/2$)が最もよい近似値を与えている。こういった傾向は位相速度よりも群速度により顕著に現れている。 $\theta=0$ や $\theta=1$ の場合には, β/π が $1/6$ を超える(要素長さが波長の約 $1/12$ に相当)と離散化に伴う波動の分散性の影響が生じていることになる。また, 透過振動数域を超える振動数では波動は伝播せず, 減衰効果のみが生じる。この減衰の大きさは, 整合質量比 θ が小さいほど大きい。

一方, 図-3のように付加集中質点が存在する場合には, 連続体モデルにおいても波動の分散性が生じ, 波動が伝播する透過振動数域と波動が伝播しない遮断振動数域が交互に現れる。これに対して, 離散モデルでは, 透過振動数域は(12)式に示した振動数域のみであり, これを超える振動数域はすべて遮断振動数域となる。付加集中質点の存在しない図-2と比較すると, 透過振動数域が狭くなっており, 整合質量モデル($\theta=1$)が連続体モデルを最もよく模擬している。

こういった傾向は, 図-4および図-5において顕著に認められる。すなわち, 理想的な質量のモデル化方法は, 集中質点の存在(α)に依存することが理解できる。すなわち, 地盤のような連続体を解析する場合には整合質量と集中質量の平均値を用いることが, 建築構造物のように連続体と集中質点が混在する問題では整合質量モデルを用いることがより好ましい。

4. 最適整合質量比の誘導とその有効性

前節の議論から, 離散解析モデルにおける波動伝播性状には, 質量のモデル化方法が大きな影響を与えることが明らかとなった。そこで, (11)式と(15)式第1式とを等置することにより, 離散モデルの位相速度と連続モデルの位相速度が等しくなる整合質量比 θ_{opt} を算定す

る。これは,

$$\theta_{opt} = 6 \frac{\beta^2 - 2 + 2 \cos \beta - \alpha \beta \sin \beta + \alpha \beta^2}{\beta^2(2 - 2 \cos \beta + \alpha \beta \sin \beta)} \dots (16)$$

と求めることができ, 最適整合質量比と称することとする。また, (13)式に(16)式を代入し, $d\theta/d\beta$ を考慮すると, 連続モデルの群速度(15)式第2式に一致する。このときの波動伝播領域は, (16)式を(12)式に代入することにより得られる。付加集中質点がない場合($\alpha=0$)には, $0 \leq \beta \leq \pi$ の振動数範囲で, 付加質点が存在する場合($\alpha > 0$)には, 振動数0から

$$\frac{\alpha \beta}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1 \quad (0 < \beta < \pi) \dots (17)$$

を満足する振動数の範囲で波動が伝播する。(17)式で定義される振動数は, 前報¹⁾の(18)式第2式で得られる振動数に一致する。したがって, 最適整合質量比 θ_{opt} を用いた離散解析モデルは, 1つめの透過振動数域において連続体モデルの波動伝播性状を完全に模擬する。なお, (16)式の静的収束値は, テーラー展開を利用することにより,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \theta_{opt} = \frac{2\alpha + 1}{2(\alpha + 1)} \dots (18)$$

と求めることができる。したがって, 文献^{4), 5)}で提案されている整合質量比 $1/2$ は, 等質連続体($\alpha=0$)の静的な波動伝播速度に適合させたものに相当する。

ちなみに, 最適整合質量比 θ_{opt} を(5)式に代入した時の動的剛性行列 $\bar{S}_{opt}$ は連続体モデルの動的剛性行列 S との間に,

$$\bar{S}_{opt} = \frac{1 + \alpha}{\frac{2}{\beta} \tan \frac{\beta}{2} + \alpha} S \dots (19)$$

の関係がある。(19)式の係数は1以下となるので, 最適整合質量比 θ_{opt} を用いた離散解析モデルは連続体モデルと比較して動的剛性を小さめに評価する傾向がある。

図-6に最適整合質量比を示す。(16)式から明らかのように, 最適整合質量比は集中質点質量比 α と無次元振動数 β に依存する。図から, 集中質点の質量比が大きく振動数が高いほど, 最適整合質量比は大きくなる

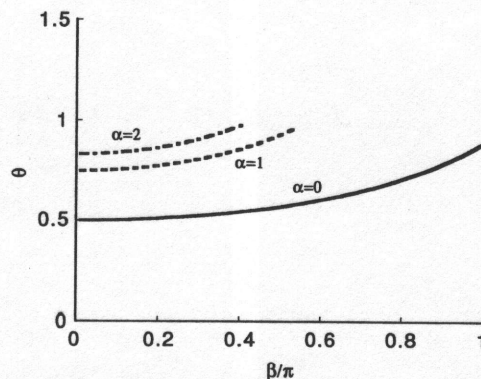
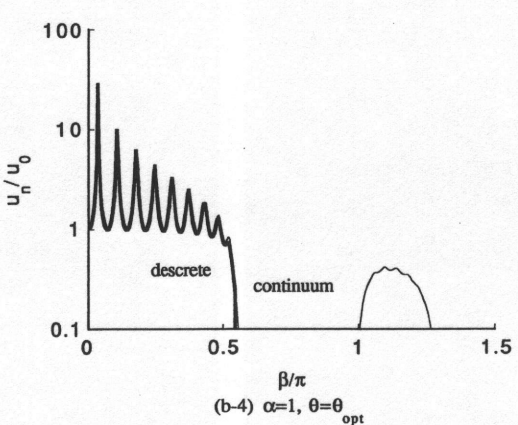
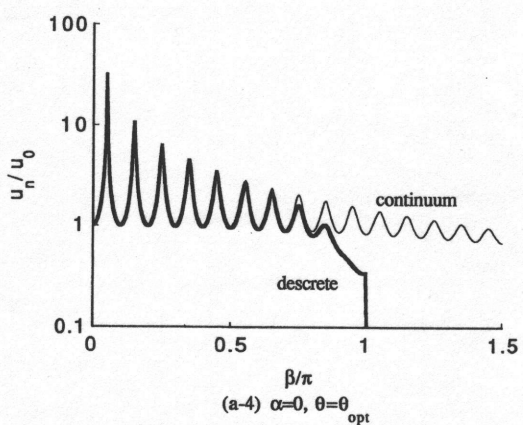
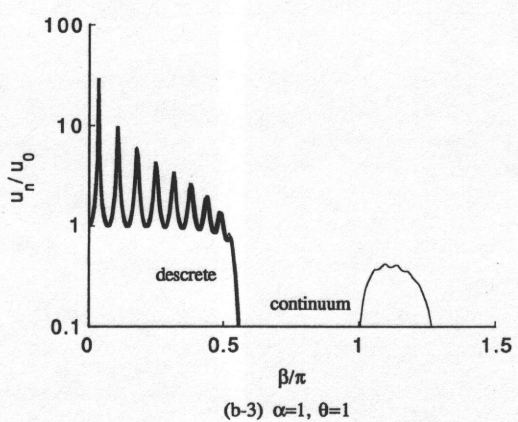
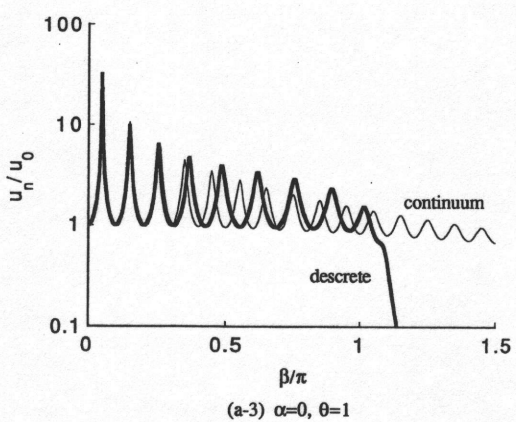
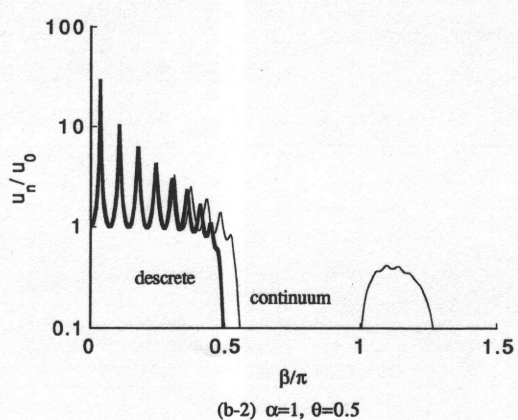
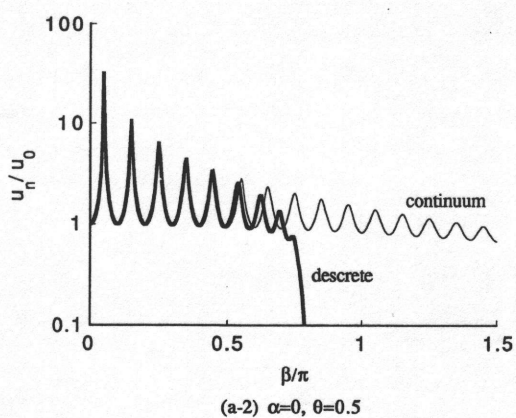
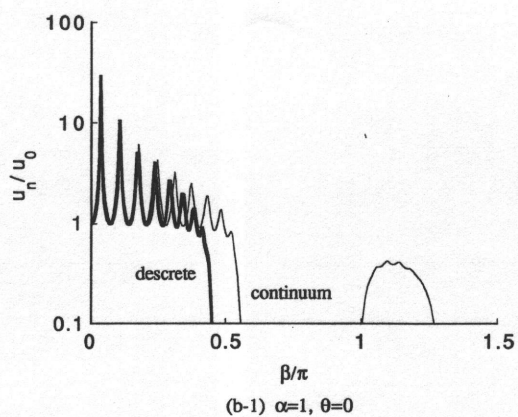
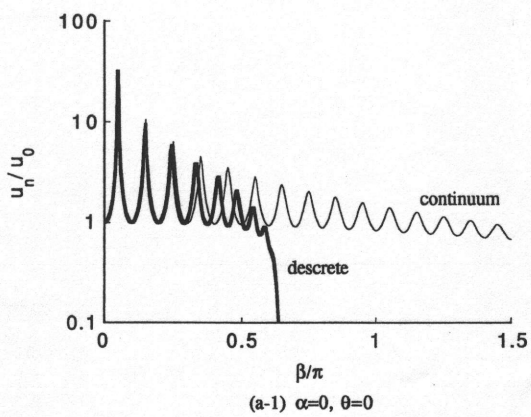


図-6 最適整合質量比



图—7 周波数応答関数

ことが分かる。

最適整合質量比を用いた解析の有効性を示すために、10個の基本構造要素からなる1次元周期構造物を想定し、端部に強制変位 u_0 を与えた場合の他端の変位応答 u_n を求めた結果を周波数応答関数のかたちで示す。ただし、内部減衰 $h=0.02$ を考慮する。図-7に集中質点の質量比が $\alpha=0$ と $\alpha=1$ の場合について、整合質量比 $\theta=0$, $\theta=1/2$, $\theta=1$, $\theta=\theta_{opt}$ を採用して、連続体モデルの結果と比較して示す。図から明らかなように等質連続体の場合には、集中質量モデルはピーク振動数を低めにピーク振幅を小さめに与える傾向があり、整合質量モデルは逆の傾向を持つ、両者共に、 $\beta/\pi=1/3$ を超える振動数で顕著な差異を示している。この振動数は要素長さが波長の $1/6$ に対応しており従来から指摘されている要素分割の基準にほぼ対応している。これに対して、 $\theta=1/2$ の場合には $\beta/\pi=1/2$ 程度（要素長が波長の約 $1/4$ に相当）まで連続体モデルとよい対応を示している。最適整合質量比を用いた場合には、ピーク振動数は $\beta/\pi=1$ まで連続体モデルと完全に一致する。ただし、 $\beta/\pi=2/3$ （要素長が波長の $1/3$ に相当）を超えると振幅が過小評価される傾向が認められる。一方、集中質点が存在する $\alpha=1$ の場合には、整合質量モデルは連続モデルとよい対応を示しているものの、 $\theta=0$, $1/2$ の場合には、ピークをかなり低振動数に評価する。特に、集中質量モデルの採用は好ましくないことが理解できる。最適整合質量比を用いた場合には連続体モデルを非常によく模擬している。

以上の結果として、最適整合質量比を用いた質量行列の作成の有効性が検証された。応答解析に周波数応答解析法を用いる場合には、振動数ごとに(16)式で示した整合質量比を与えて解析すればよい。しかし、時刻歴解析などを用いる場合には質量行列の振動数依存性を考慮することができないので、例えば(17)式に示した静的な整合質量比を用いて解析を行えばよいと考えられる。

5. まとめ

離散解析モデルの動的な数値誤差を検討するために、波動伝播速度に着目して連続体解析モデルの結果と比較検討した。特に、離散解析手法における質量のモデル化に着目して最適な質量行列の作成法について検討した。1次元モデルの範囲での検討ではあるが、以下の結論を得た。

1) 離散解析モデルでは、離散化に伴う数値分散性が存在する。波動が伝播する速度と振動数範囲は、集中質点の存在、質量のモデル化方法、振動数に依存した形となる。

2) 地盤などの連続体を解析する場合には、整合質量と集中質量の平均値を用いた質量のモデル化が、建築構造物のように集中質点が存在する場合には整合質量モデルが好ましい。

3) 連続体モデルと離散モデルの波動伝播速度を等置することにより、最適整合質量比が得られる。最適整合質量比は、振動数と集中質点の質量比に依存した形として得られ、振動数が高く集中質点質量が大きいほど大きな整合質量比となる。

4) 従来より提案されている整合質量と集中質量の平均値を用いた質量のモデル化は、等質連続体かつ低振動数において妥当なモデルである。

5) 最適整合質量比を用いて質量行列を作成することにより、解析精度を大幅に向上させることができ、また解析可能振動数範囲を広げることが可能となる。

謝 辞

本論をまとめるに当たり、ノースウェスタン大学の T. Igusa 助教授と貴重な議論を行いました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 福和伸夫, 勝倉 裕, 中井正一, Igusa, T.: 伝達行列法を用いた線状周期構造物の振動特性に関する研究—1次元連続体と集中質点で構成される周期構造物の波動伝播特性に関する基礎的考察—, 日本建築学会構造系論文報告集, 第421号, pp.101~108, 1991
- 2) MacNeal, R.H.: The NASTRAN Theoretical Manual, the Macneal-Schwendler Corporation, 1972
- 3) 例えば, Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H.: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, 1984
- 4) 例えば, 佐藤俊明, 川瀬 博: 不均質な表層地盤を伝播する弾性波動の散乱と減衰特性に関する研究, 日本建築学会学術講演梗概集 B, pp.217~218, 1990
- 5) Hughes, T.J.R., The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1987
- 6) MacNeal, R.H.: Electric Circuit Analogies for Elastic Structures, John Wiley & Sons, 1962
- 7) Goudreau, G.L.: Evaluation of Discrete Methods for the Linear Dynamic Response of Elastic and Viscoelastic Solids, UC SESM Report 69-15, University of California, Berkeley, 1970
- 8) Melosh, R.J. and Smith, H.A.: New Formulation for Vibration Analysis, J. Eng. Mech., Proc. ASCE, Vol. 115, No. 3, pp.543~554, 1989
- 9) 福和伸夫, 勝倉 裕, 中井正一: 離散化解析手法における波動のゆがみと質量行列作成法に関する提示」日本建築学会学術講演梗概集 B, pp.741~742, 1991

(1991年10月8日原稿受理, 1992年1月21日採用決定)