

弾性変位に着目した大型宇宙構造物の 線形振動解析方法に関する研究

射影行列の利用による直接時間積分解析と周波数解析への適用

A STUDY ON THE LINEAR DYNAMIC ANALYSIS METHOD FOR A LARGE SPACE STRUCTURE

Application to direct time integration method and frequency response
method using projection matrix

福和伸夫*, 勝倉 裕**, 中井正一***, 半谷裕彦****

Nobuo FUKUWA, Hiroshi KATUKURA, Shoichi NAKAI and Yasuhiko HANGAI

In the large space structures (LSS's), the rigid body motion acts a dominant role. Up to now, the linear analysis of LSS has been done only by the mode superposition method (MSM) since it's easy to evaluate elastic deformations. In this paper, the governing equation for the elastic deformation is proposed and the equivalence with MSM is explained. By applying this equation, the elastic deformation can be properly evaluated using the frequency domain and time domain methods. Since this formulation is related to projection and g-inverse, the physical meaning is explained using projection. A static solution is evaluated using the reflexible g-inverse.

Keywords : large space structure, linear dynamic analysis method, projection, generalized inverse, direct time integration method, frequency response method

大型宇宙構造物, 線形振動解析法, 射影行列, 一般逆行列, 直接積分解析, 周波数応答解析

1. 序 論

振動外力に対して構造物の設計を行う場合, 最終的には構造物内の応力レベルのチェックを行う必要がある。構造物内部の応力は弾性振動によって生じるので, 剛体変位を含む問題では, 応答値から剛体振動成分を適切に除去して, 弾性振動成分を抽出する必要がある。そこで, 本研究では, 剛体変位を内在する構造物の微小ひずみ範囲の振動解析を対象に, 剛体振動成分の抽出と弾性振動に関する基本式の誘導を行い, 直接時間解析および周波数応答解析に基づく弾性振動算定手法を示す。

近年, 宇宙構造物に代表される支持点が存在しない大型構造物の振動解析が必要になってきた。宇宙構造物の場合, 振動応答は並進・回転の剛体振動と, 弾性振動の

和で表される。従来, 研究の対象とされてきた人工衛星レベルの小規模かつ比較的剛な宇宙構造物では剛体運動が支配的となるので, 宇宙空間での振動応答は主に剛体の運動により記述され, かつ, 設計上クリティカルになる荷重が打ち上げ時の加速度であるため, 弾性振動の問題はあまりクローズアップされなかった。しかし, 将来建設が予定されている km オーダーの大型宇宙構造物 (LSS; Large Space Structure)¹⁾ は, 宇宙空間で建設組立が行われ, かつ, 柔軟な構造物であることから弾性振動応答が設計上重要な量となる。

LSS は構造物が柔軟, 軽量, かつ低減衰であり, 荷重レベルが非常に低いので, 大変位微小変形の問題となる。剛体回転を含んだ問題となるので, 本来は幾何学的

本論文の一部は参考文献 16) に発表したものである。

* 名古屋大学工学部建築学科 助教授・工博

** 清水建設大崎研究室 主任研究員・工博

*** 清水建設大崎研究室 主任研究員・工博

**** 東京大学生産技術研究所 教授・工博

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Nagoya Univ., Dr. Eng.

Senior Research Engineer, Ohsaki Research Institute, Shimizu Corp., Dr. Eng.

Senior Research Engineer, Ohsaki Research Institute, Shimizu Corp., Dr. Eng.

Prof., Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Dr. Eng.

な非線形性を考慮した更新ラグランジュ法などによる解析^{2),3)}が好ましい。しかし、有限変位問題であることを無視して剛体回転モードを除去するモード解析法に基づく解析が多用されている^{4)~6)}。他の有力な解析法である直接時間積分法や周波数応答解析法は高振動数外力に対しては採用されているが、剛体変位を励起しやすい低振動数外力に対しての適用例は見られない。この原因は、両解析法では、剛体変位と弾性変位の和である全体変位に対して定式化が行われており、剛体変位成分を適切に除去する方法が示されていないためと想像される。直接時間積分法や周波数応答解析法を宇宙構造物の解析に適用する場合には、剛体変位成分を分離しないと、持続的外力や長周期成分を含む外力が作用する問題では、応答変位に占める剛体変位成分が支配的となり弾性変位に対する数値誤差が拡大し、適切な応力を求めることができなくなる。

一方、静的に支持されない構造物には浮遊式海洋構造物がある。浮遊式海洋構造物の場合には、剛体運動に対して外部流体が抵抗するものの、剛体変位を含んだ問題となる。また、本来は弾性支持されているが、解析の仮定上静的に弾性支持されていない問題として、地盤の振動解析における有限要素法の境界処理や、構造物と地盤との動的相互作用問題に用いられる相互作用ばねの問題がある。地盤の有限要素解析では地盤の無限性を表現するために粘性境界を設けることが多い。この場合、有限要素領域は弾性支持されないで、応答変位には剛体振動成分が含まれ、静的値近傍の低振動数領域において剛体変位による誤差が蓄積される⁷⁾。また、構造物と地盤との動的相互作用問題において用いられる2次元解析モデルによる相互作用ばねも静的には値を有さず⁸⁾、構造物応答波形のゆがみの原因となることが指摘されている⁹⁾。

このように、我々が対象とする構造物の振動解析問題においては、解析者の意図にかかわらず剛体変位が含まれる問題が多い。そこで、本論では、検討の第一段階として、空中に浮遊する宇宙構造物を対象に、剛体変位の誘導を行い、支配方程式から剛体変位成分を除去した弾性振動成分に関する支配方程式を新たに定式化する。次に、この支配方程式と従来のモード解析との等価性を示す。さらに、この支配方程式に基づいて、直接時間解析および周波数応答解析により弾性変位を算定する方法を示す。一方、射影行列の観点から剛体変位を含む振動問題の考察を行い、本手法の位置づけを明確にするとともに、周波数応答解析法において重要となる静的値の評価に一般逆行列^{10),11)}を用いる方法を示す。従来、剛体変位を内在する問題に関して射影行列、一般逆行列との関連で統一的に線形振動問題を議論した研究は認められない。なお、本論で誘導した一般逆行列は動的剛性行列の

逆行列の静的収束値を与えるものであり、反射型の一般逆行列となる。半谷ら^{12)~14)}が静的な不安定構造解析などに用いたムーアペンローズ逆行列が標準固有値問題に対応するのに対して、本論で誘導した一般逆行列は一般固有値問題に対応する。

2. 剛体変位の誘導

まず、剛体変位の誘導を行う。有限要素法などの離散解析を用いた場合、線形系の振動方程式は下式のように表すことができる。

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \cdots \cdots (1)$$

ここに、 M 、 C 、 K は各々質量、減衰、剛性行列であり、 $u(t)$ および $f(t)$ は変位および外力ベクトルである。また、 t は時間を、 $\dot{}$ は時間微分を表す。本論で対象とする空中に浮遊する構造物の場合には、剛性行列 K は半正定値行列となり、(1)式の固有値にゼロ固有値を含む。また、宇宙空間においては空気抵抗がないので減衰行列は内部減衰のみで与えられる。したがって、(1)式の解には剛体変位成分が含まれることになり、剛体変位に対して仕事をするのは質量行列のみとなる。

(1)式の剛体変位は、以下のようにして求めることができる。まず剛体変位の固有モードを求める。剛体変位モードは、無減衰時の(1)式の自由振動解から得られる。すなわち、

$$K\Phi = M\Phi\Omega^2 \cdots \cdots (2)$$

ここに、 Φ は固有モード行列、 Ω^2 は対角に固有値を含むスペクトル行列である。ただし、固有モード行列 Φ は、質量行列を介して正規直交化($\Phi^T M \Phi = I$)されているものとする。剛体変位モードは固有値ゼロのモードベクトルに相当するので、固有値および固有ベクトルを剛体変位成分と弾性変位成分に分離することができ、

$$\Phi = [\Phi_R \Phi_E] \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} 0 & \\ & \Omega_E^2 \end{bmatrix} \cdots \cdots (3)$$

と表せる。ここに、下添字 R は剛体変位モードを、下添字 E は弾性変位モードを示す。なお、剛体変位モードは、固有値解析を介さずとも、構造物重心と各節点位置との幾何的關係からも簡単に誘導できる。

いま、剛体変位を求めるために、変位を剛体変位モードを介して一般化座標に変換する。

$$u_R(t) = \Phi_R U_R(t) \cdots \cdots (4)$$

(4)式を(1)式に代入し、左から Φ_R^T を乗じると、(1)式は、

$$\ddot{U}_R(t) + \Phi_R^T C \Phi_R \dot{U}_R(t) + \Omega_R^2 U_R(t) = \Phi_R^T f(t) \cdots \cdots (5)$$

と変換される。ここで、剛体モードに対応する固有値は0であるので($\Omega_R^2 = 0$)、左辺第3項は消去できる。また、減衰行列は内部減衰のみで構成されると仮定しているので、剛体変位に対しては仕事をしない。したがって、(5)式左辺第2項も消去できる。結果として、(5)式はニュー

トンの第2法則に一致し,

$$\ddot{U}_R(t) = \Phi_R^T f(t) \dots \dots \dots (6)$$

となる。(6)式は3次元振動問題の場合、6元の連立方程式となる。

一般化変位から実変位に変換すると、(6)式は,

$$\ddot{u}_R(t) = \Phi_R \Phi_R^T f(t) \dots \dots \dots (7)$$

となり、剛体変位成分の加速度が得られる。(7)式に対応する剛体変位は、初期条件を考慮して(7)式の時間積分値を評価することにより得られる。

3. 弾性変位に関する基礎式の誘導と弾性変位解

下式のように変位を剛体変位成分 u_R と弾性変位成分 u_E に分離し,

$$u(t) = u_R(t) + u_E(t) \dots \dots \dots (8)$$

これを(1)式に代入すると、(1)式は,

$$M\ddot{u}_E(t) + C\dot{u}_E(t) + Ku_E(t) = f(t) - (M\ddot{u}_R(t) + C\dot{u}_R(t) + Ku_R(t)) \dots \dots \dots (9)$$

となる。(9)式に(7)式を代入することにより,

$$M\ddot{u}_E(t) + C\dot{u}_E(t) + Ku_E(t) = (I - M\Phi_R\Phi_R^T)f(t) \dots \dots \dots (10)$$

が得られる。これが、弾性変位に関する基礎式となる。(10)式と(1)式を比較すると、左辺の係数行列は同一であり、外力ベクトルのみが剛体変位モードにより修正されていることが分かる。すなわち、剛体変位に伴う慣性抵抗を右边に考慮することによって、剛体変位を除去し、弾性変位のみを求める基礎式としている。したがって、(10)式右边は自己釣合外力となる。このことから、通常の振動解析プログラムを弾性変位算定用に準用するには、解析に先立って、剛体モードによる外力の補正を行っておけばよいことになる。

次に、本手法と従来より行われているモード解析手法との等価性を示す。(10)式に左から弾性変位モード Φ_E^T を乗じることにより下式が得られる。

$$\Phi_E^T M \ddot{u}_E(t) + \Phi_E^T C \dot{u}_E(t) + \Phi_E^T K u_E(t) = \Phi_E^T (I - M\Phi_R\Phi_R^T)f(t) \dots \dots \dots (11)$$

弾性モードと剛体モードは質量行列を介して直交している ($\Phi_E^T M \Phi_R = 0$) ので右边第2項は0となる。さらに、弾性変位モードを用いて弾性変位をモード座標に変換する ($u_E(t) = \Phi_E U_E(t)$) ことにより、(11)式は,

$$\Phi_E^T M \Phi_E \ddot{U}_E(t) + \Phi_E^T C \Phi_E \dot{U}_E(t) + \Phi_E^T K \Phi_E U_E(t) = \Phi_E^T f(t) \dots \dots \dots (12)$$

となる。(12)式は、弾性モードのみを用いたモード合成法の基礎式に他ならない。したがって、(10)式で与えられる弾性振動に着目した基礎式は、モード合成法における基礎式と等価であることが証明される。以上の関係を図-1に示す。

弾性変位成分に着目した基礎式(10)式を用いることにより、直接時間積分解析や周波数応答解析による大型

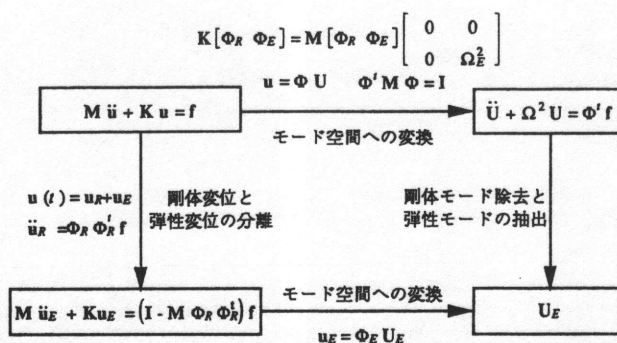


図-1 本解析法とモード解析法との等価性

宇宙構造物の解析が可能となる。直接時間積分法の場合には、適当な時間積分公式を用いて、(7)式を初期条件を考慮して積分することにより剛体変位が、(10)式を積分することにより弾性変位が、各々求められる。例えば時間積分公式に Newmark の β 法を採用した場合には、等価剛性行列に質量行列や減衰行列が係数を介して加算されるので、係数行列が正定値となり、通常の解析と全く同様にして弾性変位解を求めることができる。

一方、周波数応答解析法の場合には、フーリエ変換,

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt \quad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{i\omega t} d\omega \dots \dots \dots (13)$$

を利用することにより、(1)式は,

$$(-\omega^2 M + i\omega C + K)u(\omega) = f(\omega) \dots \dots \dots (14)$$

と振動数領域に変換される。ここに、 $u(\omega)$ と $f(\omega)$ は変位および外力をフーリエ変換したものである。また、(7)式に対応する剛体変位成分は,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_R(\omega) &= \Phi_R \Phi_R^T f(\omega) \\ u_R(\omega) &\neq 0 = -\frac{1}{\omega^2} \Phi_R \Phi_R^T f(\omega) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

と求められる。ここで、注意を要するのは、浮遊構造物の場合、静的にも加速度が存在しうることである。すなわち、一定の静的外力が作用する問題では、静的に剛体運動の定加速度が生じ、対応する速度および変位が無限大となる。

一方、弾性変位は、 $\omega \neq 0$ に対して,

$$u_E(\omega) = (-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1} (I - M\Phi_R\Phi_R^T) f(\omega) \dots \dots \dots (16)$$

と得られる。外力に静的成分が含まれ、かつ、 $\omega = 0$ の場合には、(16)式の逆行列の評価ができないので(16)式から静的弾性変位を求めることはできない。振動数領域の解析においては、静的値を適切に評価しないと、数値的な永久変形を生じさせる原因となる。そこで、本論では、一般逆行列を利用することにより静的な弾性変位を求める。結果のみを次式に示す。

$$u_E(\omega=0) = K^{-1} (I - M\Phi_R\Phi_R^T) f \quad (\omega=0) \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 K^{-1} は反射型の一般逆行列であり、

$$K_{\tau}^{-1} = (I - \Phi_R \Phi_R^t M) K^{-1} (I - M \Phi_R \Phi_R^t) = \Phi_E \Omega_E^{-2} \Phi_E^t \quad (18)$$

と表される。ここに、 K^{-1} は任意の一般逆行列である。(17) および (18) 式の誘導および意味については、射影行列との関連で次節にて説明する。また、 K^{-1} の求め方の 1 つを以下に示す。剛性行列 K は正方行列なので、三角分解などを用いて階数分解した結果は、

$$K = LL^t \quad (19)$$

と示される。ここに、 L は $n \times r$ の行列である。 n は K の大きさ、 r は K のランクである。本問題の場合、 r は弾性モードの数に等しい。(19) 式を用いて、一般逆行列 K^{-1} は、

$$K^{-1} = L(L^t L)^{-1} (L^t L)^{-1} L^t \quad (20)$$

と求められる¹⁰⁾。(17) 式中の K_{τ}^{-1} は、(20) 式を (18) 式第 1 式に代入することにより得られ、静的弾性変位は固有値解析を介することなく決定できる。

(17) 式に、 $u_E(\omega=0) = \Phi_E U_E(\omega=0)$ および (18) 式第 2 式を代入し、弾性モードと剛体モードの直交性を利用すると、

$$\Omega_E^2 U_E(\omega=0) = \Phi_E^t f \quad (\omega=0) \quad (21)$$

が得られ、モード周波数解析法で得られる静的弾性変位に関する基礎式に一致する。したがって、反射型一般逆行列を用いた静的弾性変位解はモード解析により得られる解と同一であることが示される。

4. 一般逆行列と射影行列による考察

本節では、(17) および (18) 式に示した反射型一般逆行列による静的弾性変位の誘導と、射影行列を用いた本問題の記述を試みる。

まず、一般逆行列 A^{-1} は、長方もしくは非正定な正方行列 A に対して、

$$AA^{-1}A = A \quad (22)$$

を満足する行列であり、通常用いられている逆行列の考え方を拡張したものである。(22) 式のみを満足する一般逆行列には一意性がなく、種々の一般逆行列が提案されてきている¹¹⁾。一般逆行列を用いることにより、

$$Ax = y \quad (23)$$

に対する解は、

$$x = A^{-1}y + \sum_{j=1}^{n-r} h_j b_j \quad (24)$$

で与えられる。ここに、 h_j は任意の係数、 n は A の元数、 r は A のランクである。また、(24) 式右辺第 2 項は $Ax=0$ の解であり、 b_j は、行列、

$$B = I - A^{-1}A \quad (25)$$

の一次独立ベクトルで与えられる。また、(23) 式の解の存在条件は、

$$y = AA^{-1}y \quad (26)$$

と与えられる

(22) 式に加えて、

$$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1} \quad (27)$$

を満足する一般逆行列は、反射型一般逆行列とよばれ、ある条件を満足するときのみ一意に定まる。また、(22) 式、(27) 式に加えて、

$$\left. \begin{aligned} (AA^{-1})^t &= AA^{-1} \\ (A^{-1}A)^t &= A^{-1}A \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

を満足する場合には、ムーアペンローズ逆行列となり、一意に定められる。本論では、反射型一般逆行列を A_{τ}^{-1} と、ムーアペンローズ逆行列を A^{+} と示すこととし、任意の一般逆行列は A^{-1} と記すことにする。なお、半谷により、静的な不安定構造問題に適用されたのはムーアペンローズ逆行列であり^{12)~14)} 本論で用いるのは反射型一般逆行列である。

まず、(18) 式第 2 式が反射型一般逆行列であることを証明する。このためには、(22) 式および (27) 式を満足することを証明すればよい。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} K &= M \Phi_E \Omega_E^2 \Phi_E^t M \\ K_{\tau} &= \Phi_E \Omega_E^{-2} \Phi_E^t \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

を用いると、

$$\left. \begin{aligned} KK_{\tau}K &= M \Phi_E \Omega_E^2 \Phi_E^t M \Phi_E \Omega_E^{-2} \Phi_E^t M \Phi_E \Omega_E^2 \Phi_E^t M \\ &= M \Phi_E \Omega_E^2 \Phi_E^t M = K \\ K_{\tau}KK_{\tau} &= \Phi_E \Omega_E^{-2} \Phi_E^t M \Phi_E \Omega_E^2 \Phi_E^t M \Phi_E \Omega_E^{-2} \Phi_E^t \\ &= \Phi_E \Omega_E^{-2} \Phi_E^t = K_{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となり、反射型一般逆行列であることが分かる。ここに、 $\Phi_E^t M \Phi_E = I$ を利用している。また、

$$\left. \begin{aligned} KK_{\tau} &= M \Phi_E \Phi_E^t \\ K_{\tau}K &= \Phi_E \Phi_E^t M \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となり、これらは対称行列とはならないので、(28) 式は、満足しない。したがって、ムーアペンローズ行列ではないことが分かる。この場合のムーアペンローズ行列は、標準固有値問題、

$$K\Psi = \Psi\Lambda \quad (32)$$

の弾性モード Ψ_E と対応するスペクトル行列 Λ_E を用いることにより、

$$K^{+} = \Psi_E \Lambda_E^{-1} \Psi_E^t \quad (33)$$

と得られ、(22)、(27) および (28) 式をすべて満足する。したがって、(29) 式で与えられる反射型一般逆行列は一般固有値問題に、(33) 式のムーアペンローズ逆行列は標準固有値問題に対応する。本論で対象としている構造振動問題は一般固有値問題に属するので、反射型一般逆行列を用いる必要がある。ちなみに、ムーアペンローズ逆行列を用いた場合には、得られた変位解は動的変位解の静的収束値とはならない。また、(29) 式で与えられる反射型一般逆行列は、質量行列が単位行列となるときにムーアペンローズ逆行列に一致する。

次に、一般逆行列と部分空間との関係を検討する。一

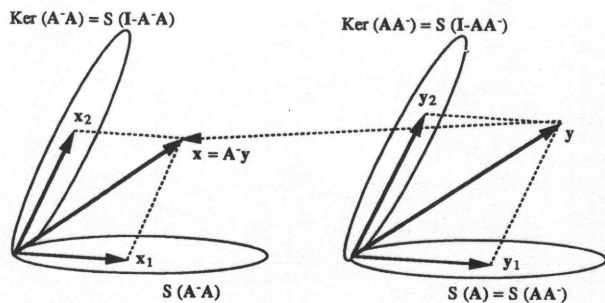


図-2 一般逆行列と部分空間の関係

一般逆行列 A^- は、図-2 に示すように、 AA^- と $I-AA^-$ が張る空間から、 A^-A と $I-A^-A$ が張る空間に線形写像する変換行列である¹¹⁾。また、 AA^- と $I-AA^-$ 、 A^-A と $I-A^-A$ は直和の関係がある。

この性質を、(29) 式で定義した反射型一般逆行列 K^- に当てはめると、

$$\left. \begin{aligned} KK^- &= M\Phi_E\Phi_E^t = I - M\Phi_R\Phi_R^t \\ I - KK^- &= M\Phi_R\Phi_R^t = I - M\Phi_E\Phi_E^t \\ K^-K &= \Phi_E\Phi_E^t M = I - \Phi_R\Phi_R^t M \\ I - K^-K &= \Phi_R\Phi_R^t M = I - \Phi_E\Phi_E^t M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

となる。ここに、 $M^{-1} = \Phi\Phi^t = \Phi_E\Phi_E^t + \Phi_R\Phi_R^t$ なる関係を利用している。今、 KK^- と $I - KK^-$ が張る部分空間をそれぞれ E と R 、 K^-K と $I - K^-K$ が張る部分空間を $\tilde{E}$ と $\tilde{R}$ とすると、 E と R 、 $\tilde{E}$ と $\tilde{R}$ はそれぞれ n 次元空間の斜交直和分解された部分空間となり、かつ、各部分空間は (34) 式右辺により一意に定められる。このことは、反射型一般逆行列が一意に定められる条件¹¹⁾ に相当する。また、(34) 式から E と $\tilde{E}$ は弾性モードが張る部分空間に、 R と $\tilde{R}$ は剛体モードが張る部分空間となっていることが理解できる。なお、質量行列が単位行列の場合、すなわち、ムーアペンローズ逆行列の場合には E と R 、 $\tilde{E}$ と $\tilde{R}$ はそれぞれ直交し、直交直和分解される。

一方、(34) 式で与えられる各諸量は、射影行列となっていることを以下に示す。射影行列である必要十分条件は、射影行列を P と示すと、

$$PP = P \dots\dots\dots (35)$$

で与えられる。今、

$$\left. \begin{aligned} P_{E,R} &= KK^- = M\Phi_E\Phi_E^t = I - M\Phi_R\Phi_R^t \\ P_{R,E} &= I - KK^- = M\Phi_R\Phi_R^t = I - M\Phi_E\Phi_E^t \\ P_{\tilde{E},\tilde{R}} &= K^-K = \Phi_E\Phi_E^t M = I - \Phi_R\Phi_R^t M \\ P_{\tilde{R},\tilde{E}} &= I - K^-K = \Phi_R\Phi_R^t M = I - \Phi_E\Phi_E^t M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

とおくと、これらは、(35) 式を満足しており、いずれも射影行列であることが分かる。さらに、 $P_{E,R}$ は部分空間 R に沿って部分空間 E に射影する射影行列であり、 $P_{R,E}$ は E に沿った R への射影行列となる。

ここで、注目すべき点は、以下の点である。前節に示した弾性変位に着目した支配方程式(10)式の右辺で行っ

ている外力の補正は、射影行列 $P_{E,R}$ を乗じていることに他ならず、外力ベクトルを弾性モードが張る部分空間 E に射影し、剛体変位を除去していることに相当する。また、解の存在条件 (26) 式が意味することは、 $KK^- = P_{E,R}$ であるので、外力ベクトルが弾性モードが張る部分空間 E に含まれていなければならないことを示している。(10) 式では、外力ベクトルを弾性モードが張る部分空間 E に射影しているので、解の存在条件は自動的に満足されることになる。

つぎに、反射型一般逆行列 K^- の定義式 (18) 式第 1 式の誘導を行う。反射型一般逆行列は、(22) および (27) 式を満足するので、以下のように変形することが可能である。

$$K^- = K^-KK^- = K^-KK^-KK^- \dots\dots\dots (37)$$

ここに、 K^- は任意の一般逆行列である。(37) 式に、(34) 式を代入すると、

$$K^- = (I - \Phi_R\Phi_R^t M)K^-(I - M\Phi_R\Phi_R^t) \dots\dots\dots (38)$$

となり、(18) 式第 1 式が誘導できる。(38) 式を用いることにより、本問題に対応する反射型一般逆行列は、任意の一般逆行列と剛体モードから求めることが可能となる。前述したように、剛体モードは、各節点の重心位置からの座標から容易に求めることが可能である。(38) 式は、任意の一般逆行列の両側に、弾性モードが張る部分空間への射影行列を乗じていることに相当するので、 K^- は部分空間 E から部分空間 $\tilde{E}$ への線形写像を行う変換行列を意味する。

以上に示した射影行列と一般逆行列の関係を図示すると図-3 のようになる。図-3 には、本問題の対象となる一般固有値問題の他に、参考として標準固有値問題に関しても示してある。

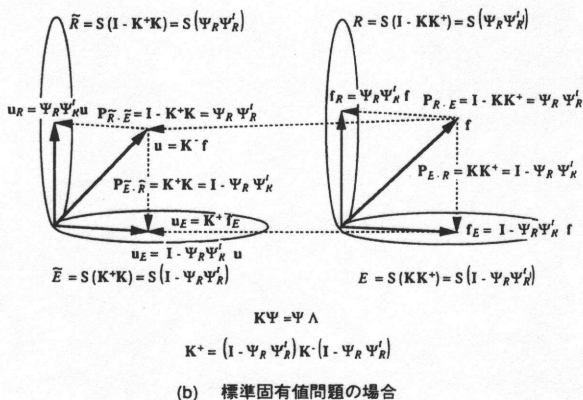
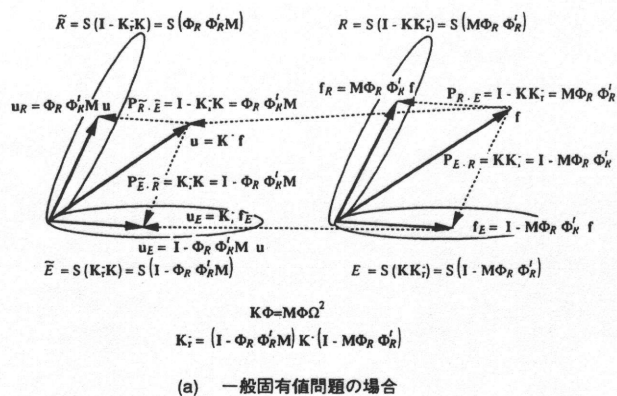
図-3(a) から前節に示した弾性変位評価方法の位置づけが容易に理解できる。まず、外力ベクトル f を弾性モードが張る部分空間 E に射影し、その後に弾性変位の部分空間に線形写像していることになる。外力から剛体変位を刺激する成分を除去することになるので、弾性変位を丸め誤差を避けて求めることが可能となる。一方、図-3(a) の中には、 f から全体変位 u を求めた後に、射影行列 $P_{\tilde{E},\tilde{R}} = I - \Phi_R\Phi_R^t M$ を乗じて弾性変位を求める方法が存在している。これは、全体変位に対する支配方程式 (1) 式から全体変位解を求めた後に、剛体変位を減じることに相当する。すなわち、(7) 式より、

$$\begin{aligned} \ddot{u}_R(t) &= \Phi_R\Phi_R^t f(t) \\ &= \Phi_R\Phi_R^t (M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t)) \\ &= \Phi_R\Phi_R^t M\ddot{u}(t) \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} (I - \Phi_R\Phi_R^t M)\ddot{u} &= \ddot{u} - \Phi_R\Phi_R^t M\ddot{u} \\ &= \ddot{u} - \ddot{u}_R \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

となる。したがって、対応する変位も (40) 式と同様の



図—3 部分空間と射影行列、一般逆行列との関係

関係を満足する。この方法では、低振動数域で剛体変位が卓越するので、全体変位から剛体変位を減じるときに丸め誤差が混入する可能性が高い。

また、剛体加速度に関する(7)式から、

$$M \ddot{u}_R(t) = M \Phi_R \Phi_R^T f(t) \dots \dots \dots (41)$$

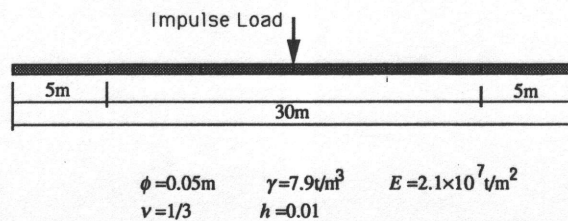
を得る。図—3(a)によれば、上式の右辺は、任意の外力ベクトルを剛体モードが張る空間 R に射影することに相当している。

このように、射影行列と一般逆行列を、部分空間と対応付けて考えることにより、剛体変位を含む構造物の振動応答に関しての本質的理解が容易になる。

前節および本節に示した方法を用いることにより、周波数解析や直接時間解析においても弾性変位と剛体変位を分離して求めることが可能となり、大型宇宙構造物などの浮遊構造物の振動解析において、応力やひずみを適切に評価することができるようになる。なお、本論に示した静的弾性変位の算定手法は、動的問題の静的収束解として定義していること、および、弾性変位に対する外力を自己釣合外力として解の存在条件を常に満足させていることが、文献¹²⁾との差異である。

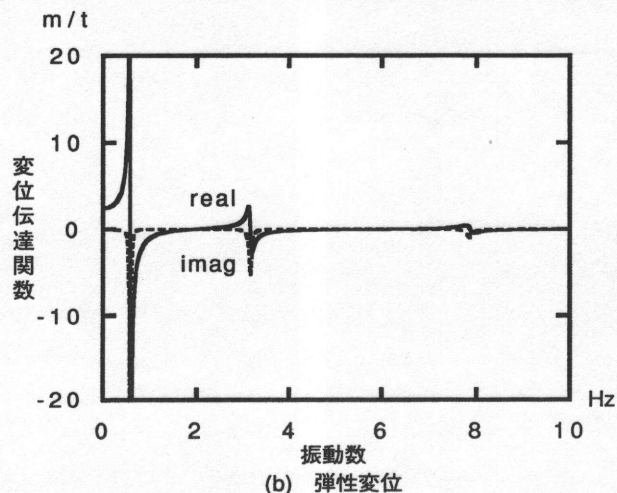
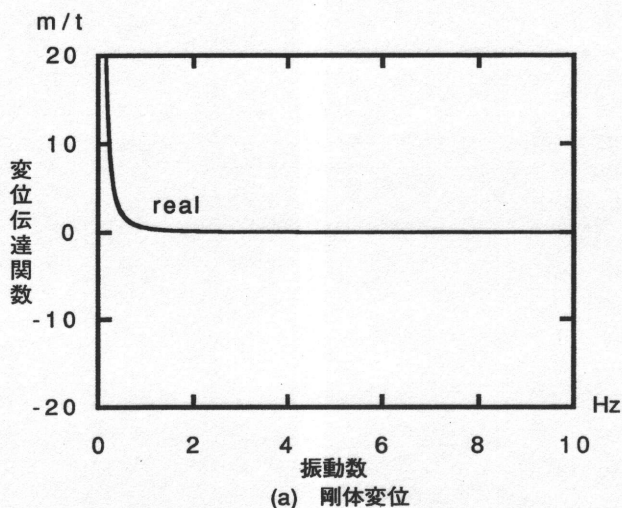
5. 解析例

本論に示した解析手法の有効性を示すために、図—4に示すような単純な例題を対象に、周波数応答関数とインパルス応答を算定する。ここでは、全長 30 m の 1 次

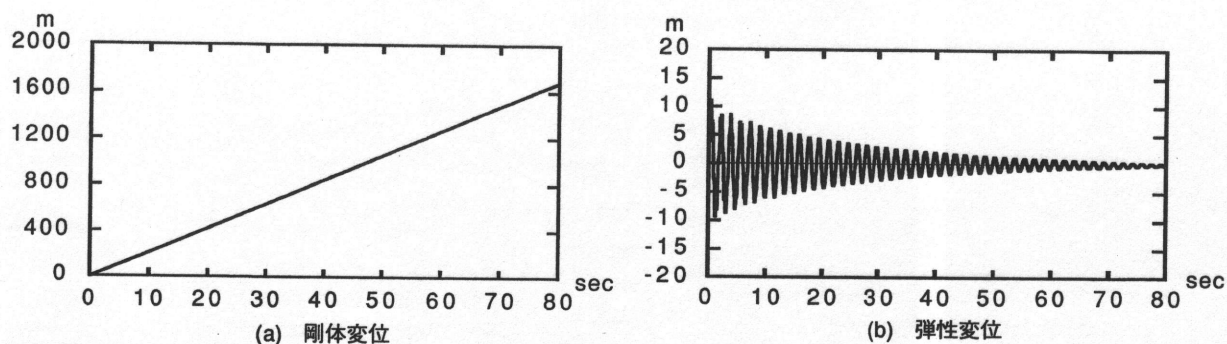


図—4 解析例題概念図

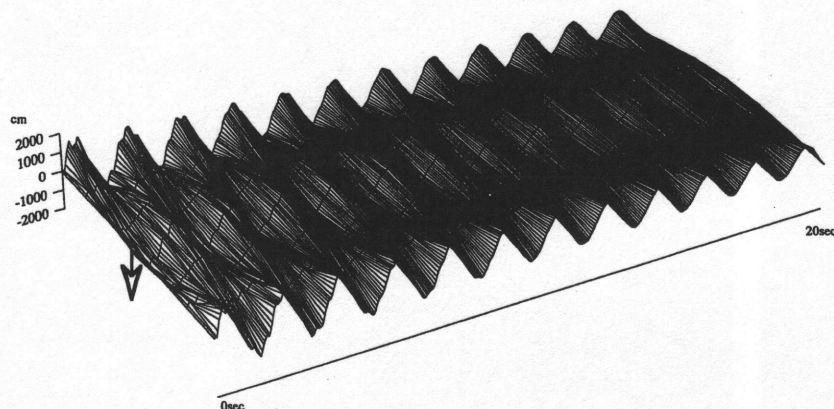
元構造体を考え、せん断変形を考慮した梁要素により 6 分割したモデルを用いている。質量行列は整合質量行列を採用している。各部材は直径 5 cm、材長 5 m の密実材とし、鋼製部材を想定して単位体積重量 7.9 t/m³、ヤング係数 2.1×10⁷t/m²、ポアソン比 1/3 を用いている。また、材料減衰は複素減衰の形で 1 % を与えている。これらの諸元は、NASA によるフリーダムに用いられる構成部材を参考に設定している¹⁵⁾。解析は周波数領域で行い、時間刻み 0.02 秒、継続時間 80.92 秒、振動数範囲 0~25 Hz とした。また、加振は構造物中央に材軸直交方向に作用させている。インパルス力は時刻 0 秒で、50 t (=1/Δt) を与えている。これは、デジタル信号の意味でのインパルス力に対応する。解析結果については、いずれも、弾性変位と剛体変位に分離して示す。図



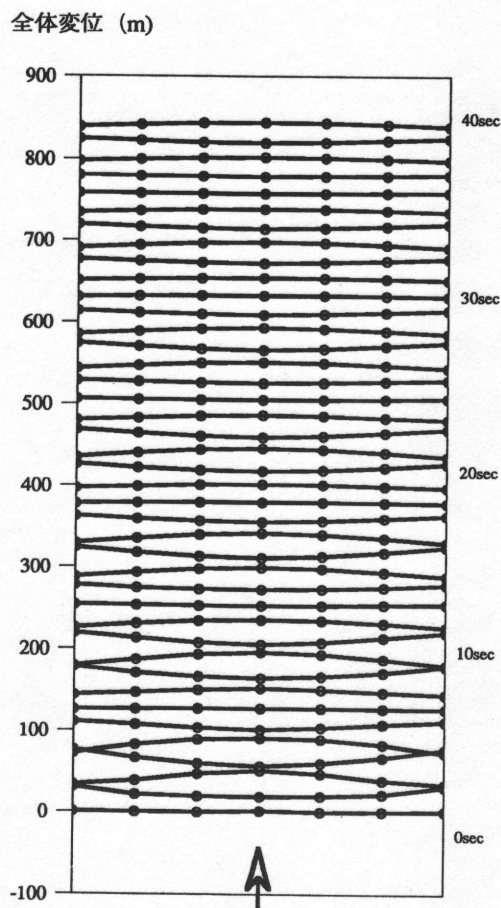
図—5 周波数応答関数



図—6 インパルス応答



図—7 弾性変位モードの時刻歴応答



図—8 全体変位モードの経時変化

—5に構造物中心位置の並進周波数応答を示す。図より、低振動数領域では剛体変位が支配的であり、比較的振動数が高くなると弾性振動が優勢となることが分かる。図—6に対応するインパルス応答を示す。また、図—7に0～20秒の弾性変位モードの時刻歴推移を示すが、時間の経過とともに、高振動数成分が減衰し、10秒以降は非常に滑らかな時刻歴特性を有している。図—8は、0～40秒の全体変位モードの推移を示したものである。これより、外力作用時から時間が経過すると、全体応答に占める弾性変位の割合が非常に小さくなり、弾性変位を直接誘導する方法を採用しないと弾性変位が剛体変位の数値誤差に隠れてしまうことが理解できる。外力が持続して作用する場合には、この傾向が顕著となると考えられるので、こういった場合には、本論で示した弾性変位抽出法が有効となる。

6. まとめ

宇宙構造物のように弾性支持されない浮遊構造物を対象に、弾性変位を適切に評価する線形振動解析手法を構築することを目的として、剛体変位と弾性変位を分離することにより、弾性振動に着目した基礎式を誘導した。本基礎式とモード解析法との等価性を示すとともに、これに基づいた、周波数応答解析や直接時間解析の方法を示した。また、射影行列と一般逆行列を用いて、剛体変位を含む線形振動問題の統一的な議論を行い、弾性変位

に着目した支配方程式は、弾性モードの張る部分空間への射影に相当することを示した。また、周波数応答解析手法において重要となる静的弾性変位の評価方法として、反射型一般逆行列を用いた手法を提案し、動的解析との連続性のある静的弾性変位解の誘導方法を示した。本論で示した手法を用いることにより、浮遊構造物に持続的外乱が作用したときの応力・ひずみを周波数応答解析手法や時刻歴応答解析手法を用いて適切に評価することが可能となり、従来、モード解析手法に限定されがちであった大型宇宙構造物の振動解析手法に、解析手法選択の自由度を増すことができる。結果として、両解析手法の既往の蓄積を利用することが可能となる。大型宇宙構造物に対するモード解析法適用の限界が幾つか指摘されている現状にあって、周波数応答解析手法や時刻歴応答解析手法の適用可能性は、将来の大型宇宙構造物の設計に対する振動解析の解決を容易にすると考えられる。

本論では、解析の対象を宇宙構造物に限定したが、本手法は浮遊式海洋構造物などの他の構造物にも適用可能なので、今後、外部減衰を考慮した問題や振動数依存性を有する問題について検討を行っていく予定である。また、解析法が、微小変形範囲での剛体回転の除去に制約されているので、今後、有限な剛体回転も含めて考慮できる解析方法を検討していく。

謝 辞

本論をまとめるに当たり、ノースウェスタン大学の T. Igusa 助教授とは貴重な議論をさせていただきました。ここに、記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 名取通弘：宇宙構造物工学の概要，土木学会論文集，第 410 号，pp.1~16，1989
- 2) Bathe, K. J. and Cimento, A. P. : Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.14, pp.1613~1626, 1979
- 3) 吉田 裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題，土木学会論文集，第 374 号，pp.25~37，1986
- 4) Browder, A.M. and Alexander, R.M. : A General Approach to Modal Analysis for Time-Varying Systems, 29th Structures, Structural Dynamics and Materials

- Conference, pp.1162~1168, 1988
- 5) Yiu, Y. C. : Selective Modal Extraction for Dynamic Analysis of Space Structures, 30th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, pp.21~31, 1989
- 6) Su, T.-J. and Craig, Jr. R. R. : Substructuring Decomposition and Controller Synthesis, 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, pp.1932~1940, 1990
- 7) Nakai, S., Takahashi, I., Tamura, T. and Fukuwa, N. : Simplified Infinite Boundary for Three-Dimensional Finite Element Analysis of Soil-Structure Interaction, 7th J.E.E.S., pp.961~966, 1986
- 8) Fukuwa, N. and Nakai, S. : A Study on Lateral Dashpots for Soil-Structure Interaction and its Application to a Simplified Technique, Soils and Foundations, Vol.29, No.3, pp.25~40, 1989
- 9) Hayashi, Y. and Katukura, H. : Effective Time-Domain Soil-Structure Interaction Analysis Based on FFT Algorithm with Causality Condition, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.19, pp.693~708, 1990
- 10) 半谷裕彦：空間構造における形態形成の数理，生研セミナーテキスト，1989
- 11) 柳井晴夫，竹内 啓：射影行列・一般逆行列・特異値分解，東京大学出版会，1983
- 12) 田中 尚，半谷裕彦：不安定トラスの剛体変位と安定化条件，日本建築学会構造系論文報告集，第 356 号，pp.35~42，1985
- 13) 半谷裕彦，川口健一：不安定リンク構造の形状決定解析，日本建築学会構造系論文報告集，第 381 号，pp.56~60，1987
- 14) 半谷裕彦，朕 富 玲：ホモロガス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析，日本建築学会構造系論文報告集，第 405 号，pp.97~102，1989
- 15) Mikulas, Jr. M. M. : In-Space Construction and Dynamics of Large Space Structures, Flight Mechanics Panel Symposium, "Space Vehicle Flight Mechanics", 1989
- 16) 福和伸夫，中井正一，勝倉 裕，海老原学，新美勝之，広瀬啓一：線形振動解析における弾性変形抽出法と周期構造物の波動伝播特性，第 6 回宇宙構造物シンポジウム，1990

(1991 年 3 月 2 日原稿受理，1991 年 7 月 9 日採用決定)