

伝達行列法を用いた線状周期構造物の振動特性に関する研究

—1次元連続体と集中質点で構成される周期構造の波動伝播特性に関する基礎的考察—

A STUDY ON THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE PERIODIC STRUCTURE USING TRANSFER MATRIX METHOD

—A basic study on the wave propagation in the periodic structure composed of one-dimensional continuum body and lumped masses—

福和伸夫*, 勝倉 裕**, 中井正一***, イグサタケル****

Nobuo FUKUWA, Hiroshi KATUKURA, Shoich NAKAI and Takeru IGUSA

The wave propagation in the periodic structure is studied using the transfer matrix method. The large space structures such as a NASA's space station are made of truss structures which are ones of the periodic structures composed of pipes and joints. Since the space station will be used for the experiment and manufacturing utilizing micro G environment in space, it is necessary to control the vibration below μ G under several external disturbances which have a wide band frequency range. In order to assure the vibration control, the basic study on the wave propagation in the periodic structure should be carried out. In this paper, a simple model of one-dimensional continuum body attached by lumped masses with same spacing is adopted. A study on the eigenvalues of the transfer matrix enables us to understand the wave propagation phenomena of the periodic structure which have pass band and stop band. The evaluation of the phase velocity, group velocity and equivalent damping makes us confirm the dynamic characteristics of the periodic structures. As a extreme case, the system composed of lumped mass and static spring is studied in order to grasp the wave propagation in the discrete system.

Keywords : periodic structure, transfer matrix method, wave propagation, group velocity, phase velocity, equivalent damping

1. はじめに

NASAによるスペースステーション建造を契機として、数百mから数km規模の大型宇宙構造物(LSS=Large Space Structure)の開発計画が進められている。LSSは、図—1のように地上構造物とは異なる構造的特徴を有している¹⁾。現在、LSSの構造形式の1つとして、トラスで構成された梁状構造が想定されている。この場合、大空間を単純な構造要素の集合体で構成することが望ましいので、同一のトラス構造が連続して結合されることになる。したがって、同一の構造要素が周期的に繰り返す線状周期構造物の振動特性を把握することが重要となる。こういった、大型宇宙構造物の構造的特徴は、地上の大空間トラス屋根構造の特徴と共通する面もある。

宇宙構造物の利用の1つとして、微小重力環境を利用した実験・製造施設が想定されている。この種の施設では、構造物内の人間活動・機械振動、シャトルのドッキングなどの種々の外乱に対して、稼働時の振動をマイクロGレベルに抑制する必要がある。通常、外乱に含まれる振動数が非常に広帯域になるので、高振動数域を含め

構造的特徴	解析手法での留意事項
固定点の欠如	剛体運動の存在
低減衰	制振装置の付加
大自由度	効率の高い数値解析手法
軽量かつ柔軟	長周期、大変形
多様な外力	広帯域の振動数
モジュール化	構造物の周期性、共通性

図—1 LSSの構造的特徴

* 清水建設(株)大崎研究室・工博
** 清水建設(株)大崎研究室・工博
*** 清水建設(株)大崎研究室・工博
**** ノースウェスタン大学 助教授・Ph. D.

Ohsaki Research Institute, Shimizu Corporation, Dr. Eng.
Ohsaki Research Institute, Shimizu Corporation, Dr. Eng.
Ohsaki Research Institute, Shimizu Corporation, Dr. Eng.
Northwestern Univ., Associate Professor, Ph. D.

た波動の伝播性状を考察することが必要となる。一方、宇宙構造物は、打上げ費用の問題と微小外力等の環境条件から、軽量・柔軟なパイプとジョイントで構成される。例えば、NASA のスペースステーションでは、パイプとジョイントの重量比は1: (1~2) 程度、パイプの長さ(約5 m)と径の比は100 程度になると想定されている。この場合には、波動の伝播にはジョイント部の影響が無視できないと考えられ、波動は主にパイプの軸振動により1次元的に伝播すると考えられる。したがって、最も単純化した数学モデルは1次元連続体にジョイントを模擬した集中質点が等間隔に分散する周期構造物となる。

一方、超高層建物の振動性状を考える場合にも、各層の耐震要素を等価せん断梁置換し、床重量を集中化すれば、同様の数学モデルが得られる。したがって、1次元連続体と集中質点で構成される周期構造の波動伝播特性に関する基礎的考察は、宇宙構造物の振動問題だけでなく建築構造物の振動問題にも結び付けて考えることができると思われる。

本論では、こういった観点にたつて、周期構造物の振動特性に関する基礎的検討を行う。すなわち、広帯域の振動数を対象に1次元連続体に集中質点が等間隔に分布する周期構造物を想定し、波動伝播性状の考察を行う。解析には、1次元連続体の波動解と伝達行列法を採用する。

周期構造物に関する検討は、Brillouin²⁾ による著書を嚆矢として数多くの研究が行われてきており、近年、宇宙構造物における周期構造物の重要性が研究を加速させている。周期構造物は、波動を透過する振動数と遮断する振動数とを有し、多種の波動を伝播させる wave guide としての働きを持つ。この性質はメカニカルフィルタとして考えることができる。周期構造物の主な解析手法には、弾性波動論に基づく方法^{3), 4)} と伝達行列法^{5), 6)} がある。前者は波数に関する級数展開を利用しており、無限に続く周期構造物の解析に適用が限られる。後者はFEM等の離散化解析手法から伝達行列を作成しており、境界条件などを考慮した解析に適しているが、振動数範囲が限られ、かつ伝達行列法特有の数値不安定性の問題を有する。伝達行列法は、従来より、構造物の静的解析⁷⁾、振動解析⁸⁾、地盤の弾性波動解析⁹⁾などに用いられてきたが、特に、周期構造物の振動解析に有力な解析法である。伝達行列法の欠点である構造物が多数連結される場合の数値安定性の低さも、伝達行列の固有値の特性⁵⁾を利用することにより解決できることが指摘されている⁶⁾。そこで、本論では、新たに波動解を伝達行列法に適用し、さらに、文献⁶⁾で示された数値不安定性回避の手法の基本的考え方を導入する。これにより、多数連結される周期構造物の解析を、高振動数域まで含めて可能

とする。また、波動解と無次元量を用いて、波動の透過・遮断振動数、位相・群速度、減衰定数を陽に示すことにより、従来ほとんど検討が行われていなかった構造物内を伝播する波動の基本的伝播性状を統一的に明らかにし、周期構造物の振動性状の考察を行う。なお、本論で得られた解に基づき、離散モデルにおける波動の伝播性状についても若干の検討を加える。

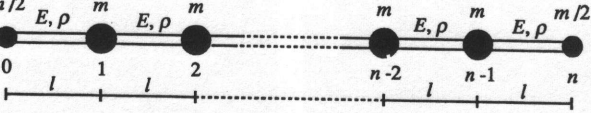
2. 伝達行列法による定式化

図-2に示すように、 $n+1$ 個の集中質点が等間隔で存在する1次元連続体を対象とする。図から分かるように、この問題の基本構成要素は、両端に $m/2$ の集中質点を取り付いた長さ l の1次元連続体であり、これが1次元的に繰返す周期構造物となっている。ここでは、宇宙構造物を想定して左側境界(質点0)に強制外力が与えられた場合と、地上構造物を想定して左側境界に強制変位が与えられた場合の2つの問題を考える。各質点の質量を m 、質点間隔を l 、連続体の弾性定数、断面積、質量密度を各々 E, A, ρ とする。この時、基本構成要素は両端に質量 $m/2$ の質点が存在する長さ l の1次元連続体(図-2b)となり、動的剛性行列 S は波動解を用いて下式で与えられる。

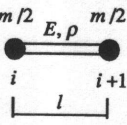
$$S = \frac{EA \frac{\omega l}{\sqrt{E/\rho}}}{l \sin \frac{\omega l}{\sqrt{E/\rho}}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega l}{\sqrt{E/\rho}} & -1 \\ -1 & \cos \frac{\omega l}{\sqrt{E/\rho}} \end{bmatrix} - \frac{\omega^2}{2} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

今、簡単のために、以下の諸量を用いて(1)式を無次元化表示する。

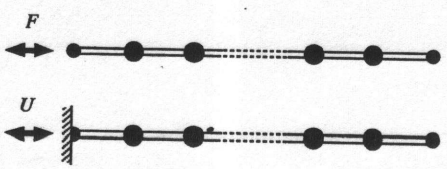
$$k_b = \frac{EA}{l}, \quad \alpha = \frac{m}{\rho A l}, \quad \beta = \frac{\omega}{V} l, \quad V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \dots\dots\dots (2)$$



(a) 1次元連続体-集中質点で構成される周期構造物



(b) 周期構造物の基本構成要素



(c) 解析対象

図-2 解析概念図

ここに、 k_b は 1 次元連続体の静的剛性、 α は集中質点と連続体との質量比、 β は無次元振動数、 V は実体波速度を意味している。なお、内部減衰は、弾性定数 E に複素減衰を導入することにより考慮される。(2) 式を用いることにより (1) 式は、

$$S = k_b \frac{\beta}{\sin \beta} \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta & -1 \\ -1 & -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表すことができる。質点位置 i と $i+1$ の状態ベクトル間の関係は、(3) 式の動的剛性行列から得られる伝達行列、

$$T = \begin{bmatrix} -S_{12}^{-1} S_{11} & S_{12}^{-1} \\ -S_{21} + S_{22} S_{12}^{-1} S_{11} & -S_{22} S_{12}^{-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta & -\frac{1}{k_b} \frac{\sin \beta}{\beta} \\ k_b \left[1 - \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2 \right] & -\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を用いて以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ f_{i+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 u_i および f_i は質点 i の変位および節点力を示す。伝達行列の固有値問題、

$$T\Phi = \Phi\Lambda \quad \dots\dots\dots (6)$$

を考えると、固有値 Λ と固有ベクトル Φ は以下のように求められる。すなわち、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2]$$

とすれば、

$$\lambda_i = \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right) \pm \sqrt{\left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2 - 1} \\ \Phi_i = \begin{bmatrix} -1 \\ \pm k_b \frac{\beta}{\sin \beta} \sqrt{\left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2 - 1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

と求められる。伝達行列の固有値の有する重要な特徴として、2つの固有値の積が 1 となる固有値の対が存在するということがある⁵⁾。本問題の場合には、 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ に相当し、(7) 式の固有値対の積を求めることにより容易に確認することができる。材料減衰がない場合には、固有値の表現式の第 2 項の平方根内部の正負に応じて、正の場合には $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ を満足する実数に、負の場合には絶対値 1 の共役複素数となる。そこで、 λ_1 および Φ_1 を $|\lambda_1| \leq 1$ となるように採用することにする。これは、 λ_1 を進行波に、 λ_2 を逆行波に対応させることに相当する。

そこで、 λ_1, Φ_1 として、 $2j\pi \leq \beta < (2j+1)\pi$ では (7) 式の + 符号を採用し、 $(2j+1)\pi \leq \beta < 2(j+1)\pi$ では (7) 式の - 符号を採用する。今、 $\lambda_1 = \lambda$ 、 $\lambda_2 = 1/\lambda$ とすれば、

$$\lambda = \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right) + \sqrt{\left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2 - 1} \\ \text{for } 2j\pi \leq \beta < (2j+1)\pi \\ = \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right) - \sqrt{\left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right)^2 - 1} \\ \text{for } (2j+1)\pi \leq \beta < 2(j+1)\pi \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。(6) 式から、伝達行列の冪乗は下式で与えられる。

$$T^n = \Phi \Lambda^n \Phi^{-1} \quad \dots\dots\dots (9)$$

したがって、周期構造物全体の関係式は (5) 式および (9) 式を用いることにより、

$$\begin{bmatrix} u_n \\ f_n \end{bmatrix} = \Phi \Lambda^n \Phi^{-1} \begin{bmatrix} u_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで注意しなければならないのは、 $\lambda_2 = 1/\lambda > 1$ の場合、 n が増大すると (10) 式の冪乗の項が過大となり、数値不安定を起こすことである。これを避けるために、一般化状態量を導入する。すなわち、

$$\begin{bmatrix} u_i \\ f_i \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

を用いる。この関係を (10) 式に代入すると、

$$\begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^n \xi_0 \\ \lambda^{-n} \eta_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。今、 $[\xi_0 \quad \eta_0]^T = [\xi \quad \eta]^T$ とすると、(11) 式と両端の境界条件から 4 つの関係式が得られる。すなわち、質点 0 に外力が作用し、質点 n が自由である場合には、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11}\xi + \Phi_{12}\eta &= u_0 \\ \Phi_{11}\lambda^n\xi + \Phi_{12}\lambda^{-n}\eta &= u_n \\ \Phi_{21}\xi + \Phi_{22}\eta &= F \\ \Phi_{21}\lambda^n\xi + \Phi_{22}\lambda^{-n}\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

と、質点 0 に強制変位が作用し、質点 n が自由である場合には、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11}\xi + \Phi_{12}\eta &= U \\ \Phi_{11}\lambda^n\xi + \Phi_{12}\lambda^{-n}\eta &= u_n \\ \Phi_{21}\xi + \Phi_{22}\eta &= f_0 \\ \Phi_{21}\lambda^n\xi + \Phi_{22}\lambda^{-n}\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここに、 F および U は質点 0 に与えられる外力および強制変位である。(13) 式および (14) 式から一般化状態量を介して、質点 0 および質点 n の状態量が得られる。すなわち、(13) 式に対しては、

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{1-\lambda^{2n}} \left(\frac{\Phi_{11}}{\Phi_{21}} - \lambda^{2n} \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} \right) F \\ u_n &= \frac{\lambda^n}{1-\lambda^{2n}} \left(\frac{\Phi_{11}}{\Phi_{21}} - \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} \right) F \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

と、(14) 式に対しては、

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \frac{\Phi_{21}\Phi_{22}(1-\lambda^{2n})}{\Phi_{11}\Phi_{22}-\Phi_{12}\Phi_{21}\lambda^{2n}} U \\ u_n &= \frac{\Phi_{11}\Phi_{22}-\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}-\Phi_{12}\Phi_{21}\lambda^{2n}} \lambda^n U \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

と解が得られる。なお、(15) および (16) 式には、 λ^{-n} の項は存在せず、 n が増大したときの数値不安定性が回避できていることが分かる。

3. 伝達行列の固有値、位相・群速度と等価減衰

(10) 式および (12) 式から明らかなように、伝達行列の固有値は、構造物内を伝播する波動の増幅率に対応し、各基本構要素内での波動の伝播性状をつかさどる。材料減衰が存在しない場合には、(8) 式で与えられる固有値は、平方根の内部の符号の正負によって、実固有値あるいは複素固有値となる。複素固有値を有する場合には、絶対値 1 の共役な複素数となるので、波動がある位相遅れをもって、減衰することなく質点 i から $i+1$ に伝播することを意味する。一方、実根を有する場合には、固有値の値に応じて減衰しながら伝播することを意味する。そこで、固有値の複素根の存在条件を検討する。この場合には、(8) 式の平方根の内部の符号が負になることから、下式で与えられる。

$$g(\beta) = \left| -\frac{\alpha\beta}{2} \sin\beta + \cos\beta \right| - 1 < 0 \dots\dots (17)$$

$g(\beta)=0$ を満足する無次元振動数 β を、 β_1, β_2 とすると、これらは、

$$\sin\beta_1=0, \quad \tan\beta_2=\frac{4\alpha\beta_2}{\alpha^2\beta_2^2-4} \dots\dots\dots (18)$$

となる。(18) 式で与えられる解は、動的剛性行列 S の行列式がゼロとなる振動数方程式の解、すなわち動的な共振振動数に一致する。 β_1, β_2 は無限個存在するが、

$$\beta_1 = j\pi \leq \beta_2 < (j+1)\pi \quad \text{for } j=0, 1, 2, \dots\dots (19)$$

を満足することが確かめられる。(19) 式の等号は $\alpha=0$ の時のみ成立する。結果として、(17) 式を満足する複素固有値の存在条件は、 β に対して、

$$\beta_1 = j\pi < \beta < \beta_2 < (j+1)\pi \quad \text{for } j=0, 1, 2, \dots\dots (20)$$

と与えられる。他の領域では、実固有値となる。

以上のことから、 β の値に応じて、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-i\varphi}, \quad \lambda_2 = e^{i\varphi} \quad \text{for } j\pi \leq \beta \leq \beta_2 < (j+1)\pi \\ |\lambda_1| &= |\lambda| < 1, \quad |\lambda_2| = 1/|\lambda| > 1 \\ &\quad \text{for } j\pi \leq \beta_2 < \beta < (j+1)\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

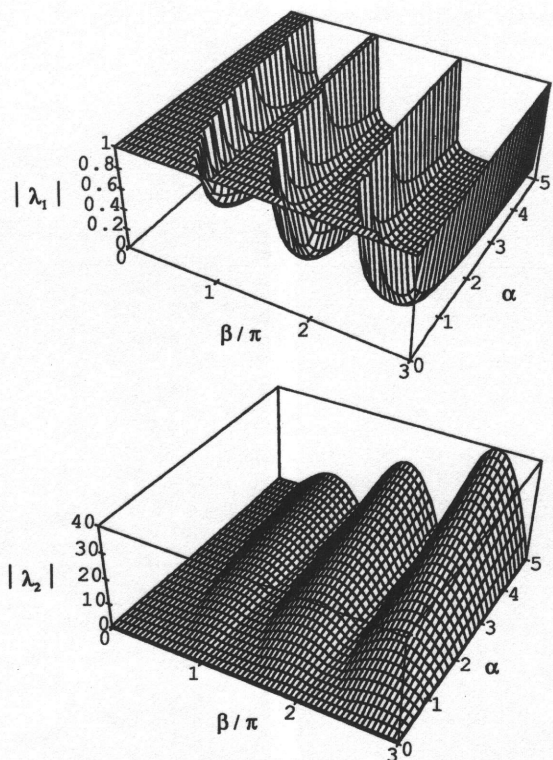


図-3 伝達行列の固有値の絶対値

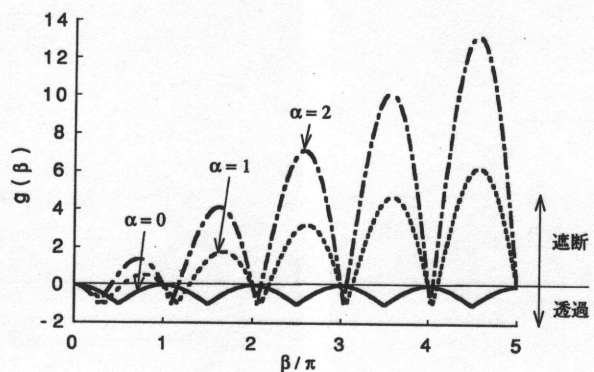


図-4 透過振動数と遮断振動数の領域

となる固有値を有することが分かる。すなわち、 λ_1 は質点位置 i から $i+1$ への、 λ_2 は質点位置 $i+1$ から i への波動伝播の増幅率を示し、 λ が複素数になるとき（以降、透過振動数域とよぶ）には無減衰振動を、 λ が実数になるとき（以降、遮断振動数域とよぶ）には単調減衰を表すことになる。図-3に、固有値 λ_1 と λ_2 の絶対値を α および β をパラメータとして示す。図から、固有値は、 α および β の値に大きく依存していることが分かる。 $\alpha\beta$ の増大とともに、絶対値が 1 となる透過振動数域が減少し、また、 λ_2 の絶対値の極大値が増加している。そこで、まず、透過振動数域の検討を行い、その後に、波動の伝播性状に重要な役割を果たす波動の伝播速度と減衰の大きさについて検討する。

今、 $\alpha\beta$ が増大した時、すなわち集中質点の質量比もしくは振動数が増大したときの β_2 は、(18) 式第 2 式から、

$$\lim_{\alpha\beta \rightarrow \infty} \beta_2 = \beta_1 + O\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right) \dots\dots\dots (22)$$

となり、 $\alpha\beta$ の増大とともに、複素固有値の存在する透過振動数域が減少し、最終的には $\beta=j\pi$ 近傍の振動数のみとなることが分かる。(17)式で与えた $g(\beta)$ の値を $\alpha=0, 1, 2$ に対して求めた結果を図-4に示す。図中、負の値を与える β の領域が透過振動数域、他の領域が遮断振動数域である。図から明らかなように、集中質点が存在しない $\alpha=0$ の場合には、全振動数領域が $g(\beta) \leq 0$ 、すなわち透過振動数域であるのに対して、 $\alpha=1, 2$ の場合には、 $g(\beta) < 0$ となる領域が α もしくは β の増大とともに減少している。すなわち、透過振動数域が $\alpha\beta$ の増大とともに減少することを示している。

次に波動の伝播速度の検討を行う。まず、位相速度は、固有値の位相角から下式で与えられる。

$$\begin{aligned} V_{\text{Phase}} &= \frac{\omega l}{\arg(\lambda)} = V \frac{\beta}{\arg(\lambda)} \\ &= V \frac{\beta}{\cos^{-1}\left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta\right)} \\ &\quad \text{for } j\pi \leq \beta < \beta_2 < (j+1)\pi \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

(23)式は進行波の位相速度を意味しており、逆行波の位相速度は(23)式の負符号を用いればよい。一方、群速度は、

$$\begin{aligned} V_{\text{Group}} &= \frac{\partial \omega}{\partial \arg(\lambda)} l = V \frac{\partial \beta}{\partial \arg(\lambda)} \\ &= V \left| \frac{\sqrt{4 - (-\alpha\beta \sin \beta + 2 \cos \beta)^2}}{(\alpha+2) \sin \beta + \alpha\beta \cos \beta} \right| \\ &\quad \text{for } j\pi \leq \beta < \beta_2 < (j+1)\pi \\ &= 0 \quad \text{for } j\pi \leq \beta_2 < \beta < (j+1)\pi \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

となる。(23)および(24)式から、波動は透過振動数域のみで伝播し、その位相速度および群速度は振動数および質量比に依存した分散性を示すことが分かる。

次に、波動の減衰の大きさを検討する。今考えている基本構造要素の材長は l であるので、等価減衰定数を h_e とすると、基本構造要素内での波動の減衰率は、

$$e^{-\frac{h_e \omega l}{V}} = e^{-h_e \beta} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる。これは、固有値の絶対値に対応するものであるので、等価減衰定数は、

$$h_e = \frac{1}{\beta} \log |\lambda| \dots\dots\dots (26)$$

となる。(26)式に(8)式を代入し、双曲線関数の性質を利用することにより、 h_e は、

$$\begin{aligned} h_e &= 0 \quad \text{for } j\pi \leq \beta \leq \beta_2 < (j+1)\pi \\ &= \left| \frac{1}{\beta} \cosh^{-1} \left(-\frac{\alpha\beta}{2} \sin \beta + \cos \beta \right) \right| \\ &\quad \text{for } j\pi \leq \beta_2 < \beta < (j+1)\pi \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

と求めることができる。(27)式から、波動の減衰は遮

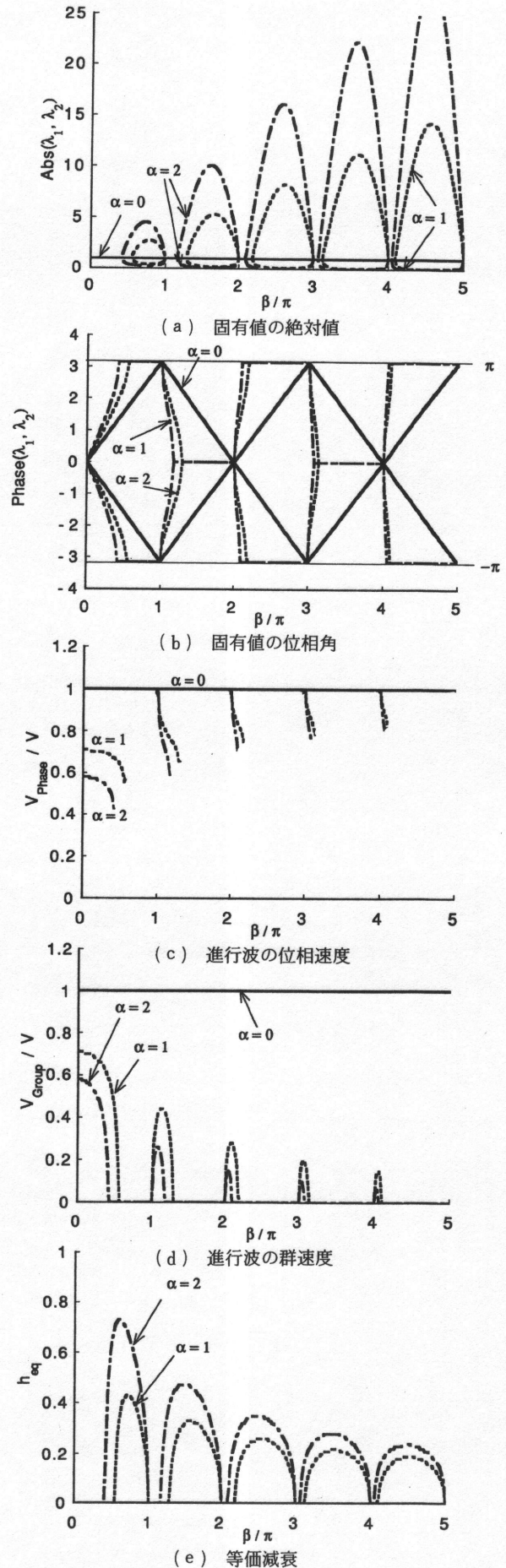


図-5 伝達行列の固有値と位相速度・群速度・等価減衰定数

断振動数域でのみ存在すること、したがって、付加集中質点がない場合 ($\alpha=0$) には等価減衰定数はつねに 0 となることが分かる。また、等価減衰定数は振動数に依存し、付加集中質点の質量比 α が大きいほど減衰定数が大きくなるという特徴がある。以上のことから、付加集中質点の存在は (27) 式で示される減衰効果を産み出すことが分かる。

図-5 に、 $\alpha=0, 1, 2$ の場合の固有値の絶対値、位相角、位相速度、群速度、等価減衰定数を一覧して示す。集中質点の存在により、実固有値が存在する遮断振動数域が生じている。この振動数域は、 β の π 間隔ごとに現れ、その領域の広さは $\alpha\beta$ の増大とともに広がり、無減衰振動の透過振動数域が減少している。透過振動数域では、集中質点の存在により波動の位相速度および群速度が分散性を示し、実体波速度より遅い速度で波動が伝播している。位相速度は、1 つめの透過振動数域では実体波速度の $1/\sqrt{1+\alpha}$ 倍の値から始まり、原点と $(\beta, V_{\text{Phase}})=(\pi, V)$ を結ぶ直線との交点で終わるのに対して、2 つめ以降の透過振動数域では実体波速度から始まり、原点と $(\beta, V_{\text{Phase}})=(j\pi, V)$ を結ぶ直線との交点で終わる。群速度は 1 つめの透過振動数域では実体波速度の $1/\sqrt{1+\alpha}$ 倍の値から始まって 0 で終わり、2 つめ以降の透過振動数域では 0 から始まり極大値を示した後に 0 で終わる。これらの速度は、質量比 α が大きいほど遅くなっている。一方、遮断振動数域では波動が存在せず、減衰効果が現れる。質量比 α が大きいほど減衰効果は大きく、振動数の増加とともに減少している。このように、伝達行列の固有値を吟味することにより、波動の伝播性、減衰性の考察が可能である。

次に、極端な例として、連続体の質量密度が 0 の場合を考える。これは、静的剛性と集中質点で構成される周期構造に対応し、連続体に対して離散モデルを考えることになる。この場合、 β は 0 に、 α は無限大となるので、新たに以下の諸量を導入する。

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_m} = \frac{\sqrt{\alpha}\beta}{2}, \quad \omega_m = 2\sqrt{\frac{k_b}{m}}, \quad V_m = \sqrt{\frac{k_b}{m}} l \dots (28)$$

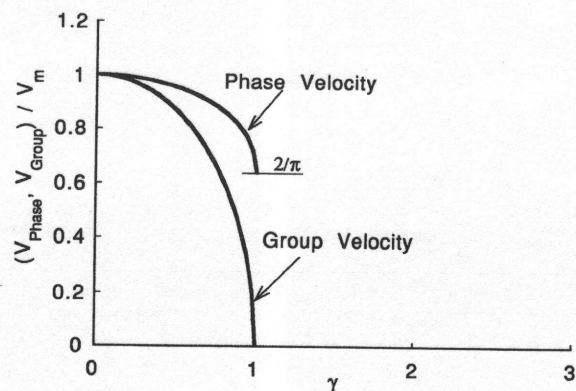
ここに、 ω_m は静的剛性と集中質点より定まる振動数、 γ は ω_m に対する振動数比、 V_m は離散モデルにおける等価速度に対応する。(28) 式の諸量を (7), (23), (24), (27) 式に代入し、 $\beta \rightarrow 0$ の極限操作を行うと、この場合の固有値、位相速度、群速度および等価減衰定数は、下式で与えられる。

$$\lambda_i = (1-2\gamma^2) \pm 2\gamma\sqrt{\gamma^2-1} \dots (29)$$

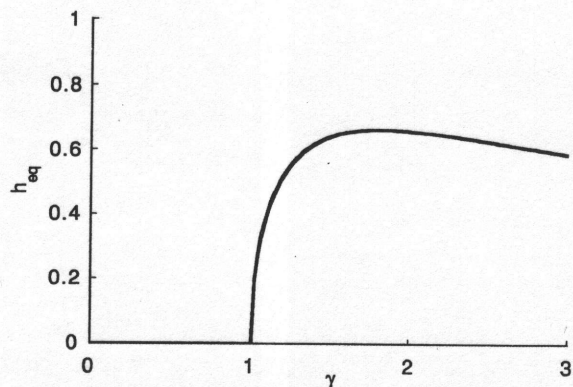
$$V_{\text{Phase}} = V_m \frac{2\gamma}{\cos^{-1}(1-2\gamma^2)} \quad \text{for } 0 \leq \gamma < 1$$

$$V_{\text{Group}} = V_m \sqrt{1-\gamma^2} \quad \text{for } 0 \leq \gamma < 1$$

$$= 0 \quad \text{for } 1 \leq \gamma$$



(a) 位相速度と群速度



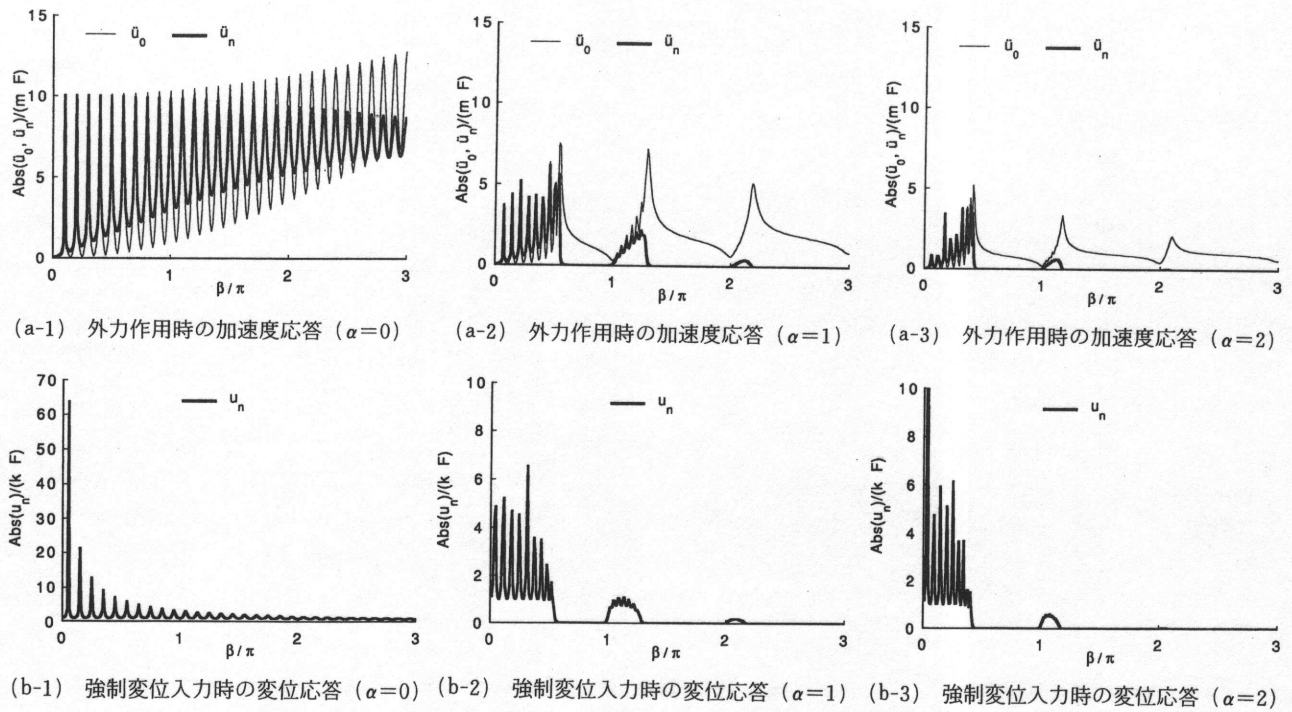
(b) 等価減衰

図-6 離散モデルの場合の位相速度・群速度・等価減衰定数

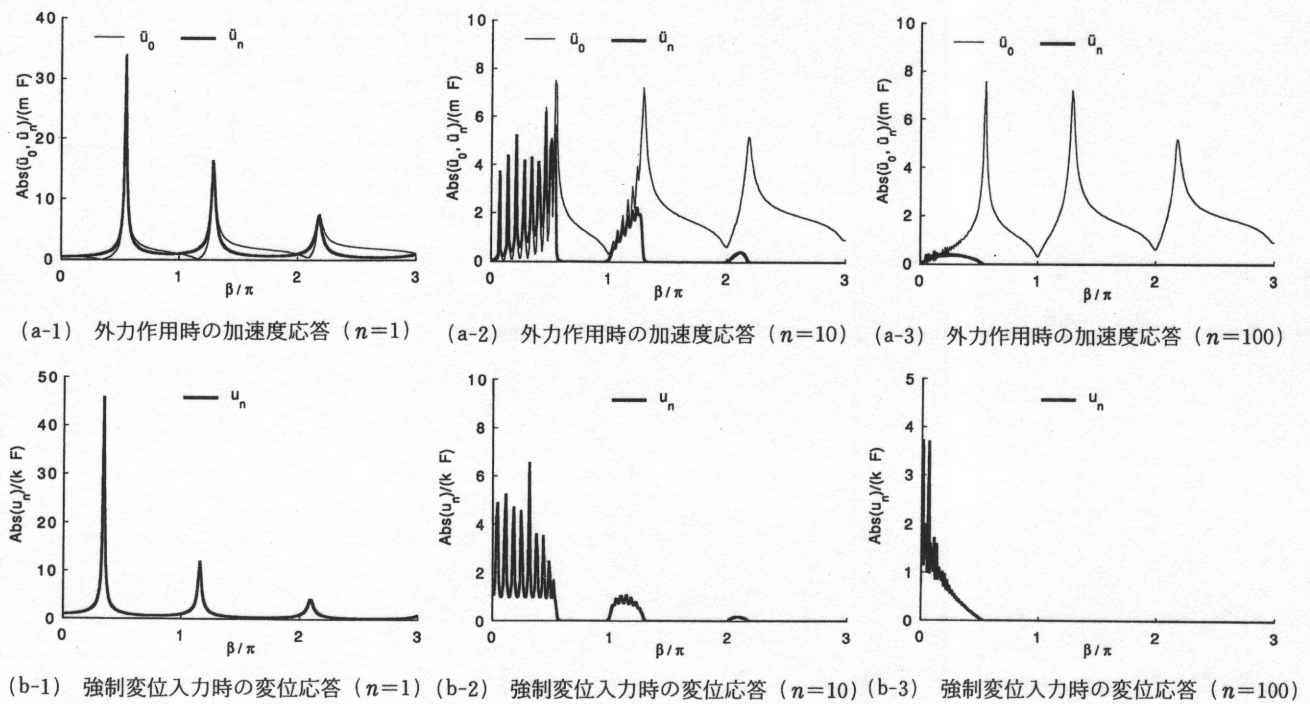
$$h_e = 0 \quad \text{for } 0 \leq \gamma < 1$$

$$= \frac{1}{2\gamma} \cosh^{-1}(1-2\gamma^2) \quad \text{for } 1 \leq \gamma$$

上式からも分かるように、離散モデルにおいても波動の分散性が認められる。すなわち、静的剛性と集中質点より定まる振動数 ω_m ($\gamma=1$) を境にして波動が伝播しなくなり、単調減衰となることを示している。図-6 に、離散モデルの場合の位相速度・群速度と等価減衰定数を示す。図より、位相速度および群速度は静的には等価速度 V_m で伝播するが、振動数の増加とともに伝播速度が減少し、振動数 ω_m ($\gamma=1$) を超えると、位相速度・群速度共に存在せず、減衰のみが生じる。したがって、離散モデルを連続体の離散化モデルと考えた場合、すなわち、静的剛性が spring に集中質点が mass となる通常の spring-mass モデルを考えた場合には、(28) 式で与えられる振動数比 γ に応じた波動の分散性が存在することになる。(30)~(31) 式は、(28) 式の等価速度から得られる波長 $(\omega/2\pi V_m)$ に対して、質点間隔 l を $1/\pi$ 以下にしないと波動が伝播しないことを意味している。通常、spring-mass モデルの解析においては、質点間隔を波長の $1/5 \sim 1/6$ 以下に分割しているため、波動は伝播するが、波動の伝播速度がゆがめられていることになる。



図—7 周波数応答関数に与える質量比の影響



図—8 周波数応答関数に与える基本要素数の影響

したがって、離散解析を行う場合には、解析者の意図にかかわらず波の分散性に伴う波形のくずれが内在していることになる。また、離散化に伴う数値減衰が(32)式によって定量化されることが分かる。こういった現象は、数値流体問題において差分解析の数値分散として議論されているが¹⁰⁾、構造問題においても同様の現象が認められたことになる。したがって、離散化においては、透過振動数と遮断振動数に留意して、メッシュ分割や解析振動数範囲を設定する必要がある。

4. 一端に外力もしくは強制変位が与えられた時の周波数応答

左側境界(質点0)に強制外力が与えられた場合と、強制変位が与えられた場合の2つの問題の周波数応答関数を求める。これらの解は(15)式および(16)式で与えられている。周期構造物の基本構造要素の数として、 $n=1, 10, 100$ を、質量比として $\alpha=0, 1, 2$ を採用する。また、材料の内部減衰として1%を考慮する。図—7に $n=10$ 、 $\alpha=0, 1, 2$ の周波数応答関数を、図—8に質量

比 $\alpha=1$, $n=1, 10, 100$ の周波数応答関数を示す。

図から分かるように、集中質点を付加することにより、周波数応答関数のピーク位置が低振動数側に移行するとともに、波動が減衰して応答が抑制される振動数領域が現れる。この波動が遮断される振動数域は、前述の伝達行列の固有値が実固有値となる振動数範囲に対応しており、質量比 α が大きいほどその範囲が広く、かつ、波動の遮断効果も大きい。こういった傾向は、構造要素の繰り返し数 n が増大するとともに顕著となる。 n の増加により構造体の全長が増大するので、ピークの数も増加する。ちなみに、各透過振動数域の中に存在するピークの数 n に等しくなる。また、遮断振動数域ではほとんど応答値が 0 となる。ただし、波動の透過振動数と遮断振動数の範囲は n の値にかかわらず変わらない。このように、集中質点と 1 次元連続体で構成される周期構造物は、通常の 1 次元連続体のような様な波動伝播とは異なり、波動の透過と遮断が交互に現れる振動数特性を有する。したがって、高振動数域まで含めた周期構造の解析にはジョイントなどの集中質点の影響を適切に考慮する必要がある。

なお、本論で対象としている振動数範囲は、宇宙構造物を対象とした場合、材長 5 m のアルミとグラファイトエポキシの複合パイプを用いる場合には $\beta=1.0$ が 100 Hz 程度に、階高 4 m の鉄筋コンクリート建築物のせん断振動を対象とした場合には、 $\beta=1.0$ が約 75 Hz に対応する。したがって、本論で行っている検討は、通常の建築振動で取り扱っている振動数に比べて非常に高い振動数であり、有限要素法などの離散解法では解析が困難な振動数範囲である。本論で想定している問題は、高振動数域での機械振動や衝撃力、あるいは音の波動伝播問題に相当する。本論の結果によれば、集中質点を連続体に分散して付加することにより、透過振動数を限定することが可能となる。したがって、この特性を、高振動数域における振動の抑制に用いることができると考えられる。

5. まとめ

周期構造物の振動特性の基礎的検討を行うことを目的として、1 次元連続体と集中質点で構成される周期構造を対象として、波動の伝播特性の検討を行った。その結果、以下の結論を得た。

- 1) 波動解と伝達行列法を組み合わせることにより、高振動数までを対象とした解析を可能とした。
- 2) 伝達行列の固有値を吟味することにより、波動を透過する振動数と、波動を遮断する振動数が存在することを示し、これらの振動数範囲を特定した。また、固有値の絶対値および位相角から、位相速度、群速度、等価減

衰定数を陽な形で求め、付加質点の存在による、透過振動数域における波動の分散性、遮断振動数域における減衰性の考察を行った。

3) 連続体の質量を 0 とすることにより、離散モデルにおける波動の伝播性状の検討を行い、離散モデル内に内在する波動の分散性と数値減衰の存在を示し、これらの定量的評価を示した。

4) 周波数応答関数を通して、伝達行列の固有値が与える性質の重要性を指摘するとともに、付加質点が振動を抑制する効果のあることを示し、高振動数域の制振への適用可能性を示唆した。

今後は、より複雑な周期構造物の振動解析手法の開発と振動性状の把握を行うとともに、本論で得られた連続体の波動伝播性状を真値として各種離散化動的解析手法の波動伝播特性の検討を行う予定である。

謝 辞

本論をまとめるに当たり、大崎研究室の海老原学、新美勝之両氏から貴重な助言を受けました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 名取通弘：宇宙構造物工学の概要，土木学会論文集，第 410 号，pp. 1~16，1989
- 2) Brillouin, L. : Wave Propagation in Periodic Structures, Dover, 1953
- 3) Mead, D. J. : Free Wave Propagation in Periodically-Supported Infinite Beams, J. Sound and Vibration, Vol. 11, pp. 181~197, 1970
- 4) Mead, D. J. : A New Method of Analyzing Wave Propagation in Periodic Structures ; Applications to Periodic Timoshenko Beams and Stiffened Plates, J. Sound and Vibration, Vol. 104, pp. 9~27, 1986
- 5) Lin, Y. K., and McDaniel, T. J. : Dynamics of Beam-Type Periodic Structures, J. Engineering for Industry, Vol. 91, pp. 1133~1141, 1969
- 6) Yong, Y., and Lin, Y. K. : Dynamics of Complex Truss-Type Space Structures, 30th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, pp. 1295~1304, 1989
- 7) 例えば、鷲津久一郎，宮本 博，山田嘉昭，山本善之：有限要素ハンドブック，培風館，1981
- 8) Pestel, E. C., and Leckie, F. A. : Matrix Methods in Elastic Mechanics, McGraw-Hill, 1963
- 9) Haskell, N. A. : The Dispersion of Surface Waves of Multi-Layered Media, Bul. Seis. Soc. America, Vol. 43, pp. 14~34, 1953
- 10) 例えば、Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H. : Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, 1984

(1990 年 10 月 9 日原稿受理，1991 年 1 月 9 日採用決定)。